Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Nikola Tchipev
Felix Dietrich

SoSe 2015

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 2. Übungsblatt: Kondition, Stabilität und Differenzenquotient

1) Kondition

a) $cond(f_1, x) = \left|\frac{x \cdot a}{a \cdot x}\right| = 1$

$\Rightarrow$ keine Zunahme des relativen Fehlers durch Multiplikation $\quad\Rightarrow$ gut konditioniert

b) $cond(f_2, x) = \left|\frac{x \cdot \left(-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a-x}{b}}\right| = \left|\frac{x}{a-x}\right|$

$\Rightarrow cond(f_2, x) \gg 1$ für $x \approx a$ und $a \neq 0 \quad\Rightarrow$ schlecht konditioniert für $x \approx a$

c) $cond(f_3, x) = \left|\frac{x}{3e^x - 3} \cdot 3e^x\right| = \left|\frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}\right|$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} cond(f_3, x) &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}\right| = \left|\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}\right| \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \left|\lim_{x\to 0} \frac{e^x + x \cdot e^x}{e^x}\right| \\
&= \left|\lim_{x\to 0}(1 + x)\right| = 1
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für die interessanten Fälle:

$$cond(f_3, x) \to \begin{cases} \infty & \text{für } x \to \infty \\ 1 & \text{für } x \to 0 \\ 0 & \text{für } x \to -\infty \end{cases}$$

2) Beispiel für schlechte Kondition: Schnittpunkt zweier Geraden

a) Durch gleichsetzen der beiden Geraden

$$\begin{aligned} g_1 = g_2 \Leftrightarrow x &= mx + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{1-m} =: f(m) \end{aligned}$$

erhalten wir den x-Wert des Schnittpunktes. Die Funktion f beschreibt nun den Zusammenhang zwischen der Eingabe m und der Ausgabe x.

b) Mit der Ableitung

$$f'(m) = (-1) \cdot (1-m)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-m)^2}$$

gilt für die Konditionszahl

$$cond(f, m) = \left| \frac{m(1-m)^{-2}}{(1-m)^{-1}} \right| = \left| \frac{m}{1-m} \right|.$$

Für $m \approx 1$ ($\hat{=}$ Geraden fast parallel) folgt somit $cond \to \infty$, d.h. es liegt ein schlecht konditioniertes Problem vor. Das wollen wir uns jetzt an einem genauen Zahlenbeispiel verdeutlichen. Für die gegebene Stelle $m = 1.005$ haben wir die Kondition

$$cond(f, 1.005) = \left| \frac{1 + \frac{1}{200}}{\frac{1}{200}} \right| = \underline{201}.$$

Damit erwarten wir, dass mit $m = 1.005$ ein relativer Eingabefehler um ungefähr das 200-fache verstärkt wird.

c) Um wieviel wird der Eingabefehler nun wirklich verstärkt? Dazu berechnen wir den tatsächlichen Schnittpunkt, den fehlerhaften Schnittpunkt, und die relativen Fehler in Ein- und Ausgabe.

$$\begin{aligned} x = f(m) &= \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-1.005} = -200 \\ \tilde{x} = f(\tilde{m}) &= \frac{1}{1-\tilde{m}} = \frac{1}{1-1.01} = -100 \\ \text{relativer Eingabefehler} : &\left| \frac{m-\tilde{m}}{m} \right| = \left| \frac{\frac{1}{200}}{\frac{201}{200}} \right| = \frac{1}{201} \\ \text{relativer Ausgabefehler} : &\left| \frac{f(m)-f(\tilde{m})}{f(m)} \right| = \left| \frac{-200+100}{-200} \right| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit ist der verstärkende Faktor

$$\frac{\text{relativer Ausgabefehler}}{\text{relativer Eingabefehler}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{201}} = \underline{100.5}$$

3) Stabilität

Mit der Epsilontik lässt sich die Fehlerverstärkung innerhalb eines Berechnungsverfahrens analysieren. Bei der Betrachtung des relativen Ausgabefehlers $\left|\frac{\mathrm{rd}(f)(x)-f(x)}{f(x)}\right|$ gelten dabei folgende Regeln:

- Jede Operation erzeugt einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_M$, d.h.

$$(a \operatorname{op}_M b) = (a \operatorname{op} b) \cdot (1+\varepsilon_i) \text{ mit } |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_M$$

- $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \doteq 0$

Mit Rundungsfehlern $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ stellen sich die gerundeten f-Auswertungen wie folgt dar:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rd}(f_1)(x) &= a \cdot x \cdot (1+\varepsilon_1) \\
&= \boxed{f_1(x) + f_1(x) \cdot \varepsilon_1} \\
\mathrm{rd}(f_2)(x) &= \frac{(a-x)\cdot(1+\varepsilon_1)}{b} \cdot (1+\varepsilon_2) \doteq \frac{(a-x)}{b} \cdot (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2) \\
&= \boxed{f_2(x) + f_2(x) \cdot (\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \\
\mathrm{rd}(f_3)(x) &= (3e^x(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)-3)(1+\varepsilon_3) \\
&\doteq (3e^x(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)-3)(1+\varepsilon_3) \\
&= (3e^x-3)(1+\varepsilon_3) + 3e^x(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \\
&\doteq \boxed{f_3(x)(1+\varepsilon_3) + 3e^x(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den die Stabilität beschreibenden relativen Fehler:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{rd}(f_1)(x)-f_1(x)}{f_1(x)}\right| &= \left|\frac{f_1(x)+f_1(x)\cdot\varepsilon_1-f_1(x)}{f_1(x)}\right| = |\varepsilon_1| \\
\left|\frac{\mathrm{rd}(f_2)(x)-f_2(x)}{f_2(x)}\right| &= \left|\frac{f_2(x)+f_2(x)\cdot(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-f_2(x)}{f_2(x)}\right| = |\varepsilon_1+\varepsilon_2| \\
\left|\frac{\mathrm{rd}(f_3)(x)-f_3(x)}{f_3(x)}\right| &= \left|\frac{f_3(x)\cdot\varepsilon_3+3e^x(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{f_3(x)}\right| = \left|\varepsilon_3+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{3e^x}{3e^x-3}\right| \\
&\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} |\varepsilon_3| + \left|(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{e^x}{e^x-1}\right| \leq \varepsilon_M + 2\varepsilon_M\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right| \\
&= \varepsilon_M\left(1+2\cdot\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|\right) \to \infty \text{ für } x \to 0.
\end{aligned}$$

Die Auswertungen der Funktionen f_1 und f_2 sind somit offensichtlich stabil. Der Algorithmus zur Auswertung von $f_3(x)$ ist instabil für alle Werte $x \approx 0$, ansonsten stabil. **Achtung:** Für zunehmendes x haben wir bereits in Teilaufgabe 1 a) festgestellt, dass auch die Konditionszahl von $f_3(x)$ steigt. Also ist zwar die Auswertung von $f_3(x)$ für große x per Definition stabil, diese Aussage ist jedoch in Anbetracht der schlechten Kondition wertlos!
Für $x \approx 0$ haben wir den Fall eines instabilen Algorithmus trotz guter Kondition!

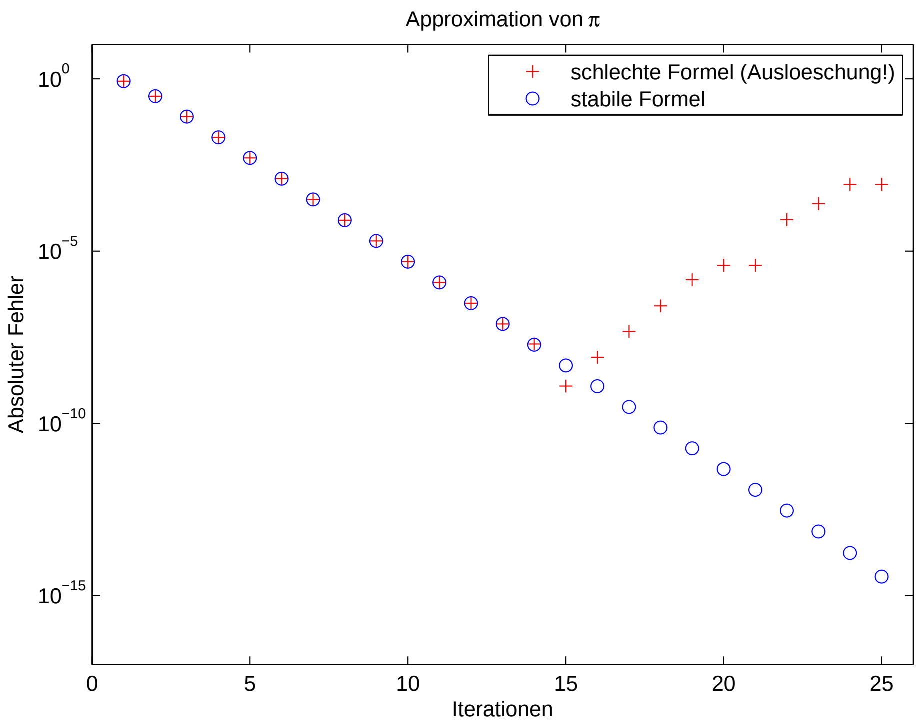
4) Ermittlung von π nach Archimedes

Vermeintlich höhere Genauigkeit durch mehr Rekursionen verbessert das Ergebnis nicht sondern zerstört den gesamten Wert!
Problem: Auslöschung!

Algebraische Umformung zur Vermeidung der Auslöschung:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}} \\ &= \frac{|s_n|}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}} \end{aligned}$$

Vergleich der absoluten Fehler der beiden Formeln in Bezug auf echte Lösung π in semilogarithmischer Skala (erstellt mit matlab-Programm archimedes.m aus www):



(Falls Sie in **float**-Genauigkeit, statt **double**-Genauigkeit rechnen, tritt das Problem früher auf!)

Zusatzaufgabe) Klausuraufgabe SoSe 2014

a) Kondition

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad cond_f(x) = \left| \frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)} \right|$$

i)

$$cond_f(-1) = \lim_{x \to -1} \left| \frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)} \right| = \frac{-\infty}{-\infty} (\text{l'Hospital}) = \lim_{x \to -1} \left| \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} \right|$$

$$= \lim_{x \to -1} \left| \frac{1}{x+1} \right| = \infty$$

schlecht konditioniert.

ii)

$$cond_f(0) = \lim_{x \to 0} \left| \frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)} \right| = \frac{0}{0} (\text{l'Hospital}) = \lim_{x \to 0} \left| \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} \right|$$

$$= \lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x+1} \right| = 1$$

gut konditioniert.

b) Stabilität

$$\mathrm{rd}(f)(x) = (1+\varepsilon_2) \ln\left((1+\varepsilon_1)(x+1)\right)$$
$$= (1+\varepsilon_2)\ln(1+\varepsilon_1) + (1+\varepsilon_2)\ln(x+1)$$
$$\left| \frac{\mathrm{rd}(f)(x) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{(1+\varepsilon_2)\ln(1+\varepsilon_1)}{\ln(x+1)} + \varepsilon_2 \right|$$

i) $x \to -1$

$$\lim_{x \to -1} \left| \frac{(1+\varepsilon_2)\ln(1+\varepsilon_1)}{\ln(x+1)} + \varepsilon_2 \right| = |\varepsilon_2| \leq \varepsilon_{Ma}$$

stabil, aber laut a) schlecht konditioniert.

ii) $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{(1+\varepsilon_2)\ln(1+\varepsilon_1)}{\ln(x+1)} + \varepsilon_2 \right| = \infty$$

instabil.