

## Numerisches Programmieren, Übungen

### Musterlösung 4. Übungsblatt: QR-Zerlegung, Lineares Ausgleichsproblem

#### 1) QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen

Zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen zur QR-Zerlegung:

- Für  $n \times n$ -Matrizen lassen sich verallgemeinerte Drehungen  $G_{i,k}$  angeben, die analog genau das Spaltenelement  $k$  zu Null machen bzw.  $i$  in  $r$  überführen (Drehung in der  $(i, k)$ -Ebene des  $\mathbb{R}^n$ ).  
Mit der Multiplikation dieser einzelnen Matrizen  $G_{i,k}^T$  zu einer Gesamtmatrix  $Q$  lässt sich das Verfahren analog zu unserem Beispiel durchführen.
- Die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen ist im Allgemeinen etwas teurer als die LR-Zerlegung (ca.  $\frac{4}{3}n^3$  statt  $\frac{2}{3}n^3$ ), dafür aber stabiler. Eine Pivotsuche ist nicht nötig.
- Bei dünnbesetzten Matrizen und mit Hilfe schneller Implementierungen (fast givens) lässt sich der Aufwand wesentlich reduzieren.
- In der Praxis werden die einzelnen Rotationsmatrizen  $G_{i,k}$  natürlich nie explizit aufgestellt, sondern stets nur ihre Wirkung  $G_{i,k} \cdot A$  berechnet und abgespeichert.  $G_{i,k}$  kann dabei durch eine einzige Zahl codiert/decodiert werden.

a) Aufstellen der Matrix  $G_\varphi$  mit  $(a, b)^T = (1, 2)$ :

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \Rightarrow \quad \boxed{G_\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Berechnen der Matrix  $R$ :

$$\boxed{R} = G_\varphi \cdot A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

b) Lösung des Gleichungssystems: Es gilt  $Rx = Q^T b = G_\varphi b$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow x_2 = 2, \quad x_1 = (1 - 3x_2)/5 = -5/5 = -1 \\ &\Rightarrow x = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

## 2) Ausgleichsgerade

a) Jeder Punkt  $(x_i, y_i)$  in die Gleichung  $y = mx + t$  eingesetzt entspricht:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix}}_{=z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=b}$$

b)

$$\begin{aligned} A^T A x &= A^T b \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$y = 0.5x + 1.5$$

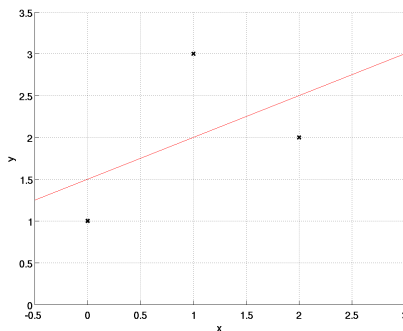


Abbildung 1: lineare Ausgleichsgerade

### 3) Lineares Ausgleichsproblem und QR-Zerlegung

- a) Um Element (2,1) zu Null zu drehen, müssen wir Element (3,1) unverändert lassen und (1,1) als Diagonalelement wählen (also  $a = A_{21} = 1$  und  $d = A_{11} = 1$ ). Damit brauchen wir die Elementarmatrix  $G_{2,1}$ . Die konkreten Einträge ergeben sich zu

$$c = 1/\sqrt{1^2 + 1^2} = 1/\sqrt{2}, \quad s = 1/\sqrt{1^2 + 1^2} = 1/\sqrt{2}.$$

Damit erhalten wir:

$$G_{2,1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 := G_{2,1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analoges Vorgehen für Eintrag (3,1) von  $A_1$  mit Elementarmatrix  $G_{3,1}$  und

$$c = \sqrt{2}/\sqrt{2+1} = \sqrt{2/3}, \quad s = 1/\sqrt{2+1} = \sqrt{1/3}$$

führt zu

$$G_{3,1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{1/3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1/3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^T A := G_{3,1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{1/3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1/3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Normalerweise müsste man hier nun eine dritte Drehung  $G_{3,2}$  anwenden, aber in unserem Fall entstand schon bei der vorehigen Drehung zufällig eine 0 im Feld (3, 2).

- b) Es gilt für die QR-Zerlegung die Rücksubstitution:  $Rz = \beta_1$ . Dabei ist  $\beta_1$  Teil des Vektors  $Q^T b$ , wobei  $Q^T$  die Hintereinanderausführung der Givensrotationen (zur Erzeugung von R) darstellt. In unserem Fall bedeutet das:

$$b_1 := G_{2,1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} := G_{3,1} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{1/3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{1/3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

Damit muss nur mehr  $Rz = \beta_1$  per Rückwärtssubstitution gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m = 1/2, \quad \Rightarrow t = \left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3/2$$

c) Für den ersten Beweis nutzen wir die folgende besondere Eigenschaft orthogonaler Matrizen

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  aus:

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Da  $Q^T$  ebenfalls orthogonal ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|b - Az\|_2^2 &= \|Q^T(b - Az)\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \beta_1 - Rz \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|\beta_1 - Rz\|_2^2 + \|\beta_2\|_2^2 \geq \|\beta_2\|_2^2 \end{aligned}$$

Daher ist  $\|b - Az\|_2$  minimal genau dann wenn  $\|\beta_1 - Rz\|_2 = 0$ , d.h. wenn  $z$  Lösung des linearen Gleichungssystems  $Rz = \beta_1$  ist.

Für den zweiten Beweis brauchen wir nur die Eigenschaft  $Q^T Q = I$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} A^T Ax &= A^T b \\ [R^T | 0] Q^T Q \begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x &= [R^T | 0] Q^T b \\ \stackrel{Q^T Q = I}{\Rightarrow} [R^T | 0] \begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x &= [R^T | 0] Q^T b \\ R^T Rx &= R^T \beta_1 \\ \Rightarrow Rx &= \beta_1 \end{aligned}$$