

Beispiel Diffusion (mit Anwendung in der Bildverarbeitung):

Die Strömung j – hervorgerufen durch Dichteunterschiede – erfolgt in Richtung des negativen Gradienten der Konzentration $u \rightarrow$

$$j(x, t) = -D \cdot \nabla u(x, t)$$

Massenerhaltung: Änderung der Konzentration in einem Volumenelement kann nur durch Strömung erfolgen \rightarrow

$$\text{In 1D} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\text{div}(j) = -\frac{\partial j_1}{\partial x_1} - \frac{\partial j_2}{\partial x_2} - \frac{\partial j_3}{\partial x_3}$$

Notation:

Nabla-Operator $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ ∂ für partielle, d für totale Ableitung.

Gradient $f(x, y, z): \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}: \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} =$
 $= f_x + g_y + h_z = \text{div}(F)$

Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad}(U)) = \nabla(\nabla U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} U + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$



$$j(x,t) = -D \cdot \nabla u(x,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -\text{div}(j)$$



Zusammen:

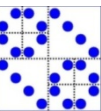
$$u_t = \text{div}(D \cdot \nabla u)$$

Im isotropen Fall ist D eine konstante Zahl, z.B. $D=1$:

$$u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

im zweidimensionalen Fall;

Δ heißt Laplace-Operator. 1D, 2D, 3D,...



Einteilung Partieller Diff'gleichungen: $u(x,y,t)$

Gleichgewichtsgl. (elliptische PDE):

$$-\Delta u = f \quad \text{Zweite Ableitungen nur positiv.}$$

Wärmeleitungsgl. (parabolische PDE):

$$\Delta u = u_t \quad \text{Eine Variable nur erste Abl.}$$

Wellengleichung (hyperbolische PDE):

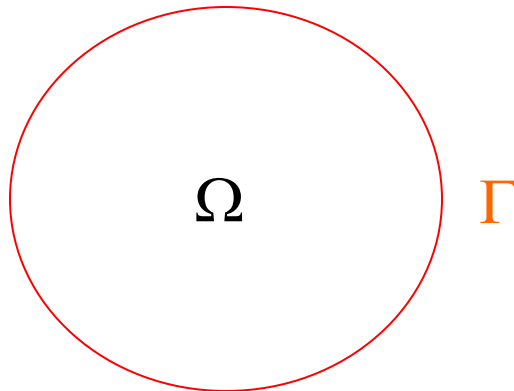
$$\Delta u = u_{tt} \quad \text{Eine Variable negative zweite Abl.}$$



Elliptische PDE: Gegeben sind zusätzlich Randwerte.



Also $-\Delta u = f$ auf Gebiet Ω und $u(x)$ auf Γ , dem Rand von Ω

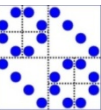
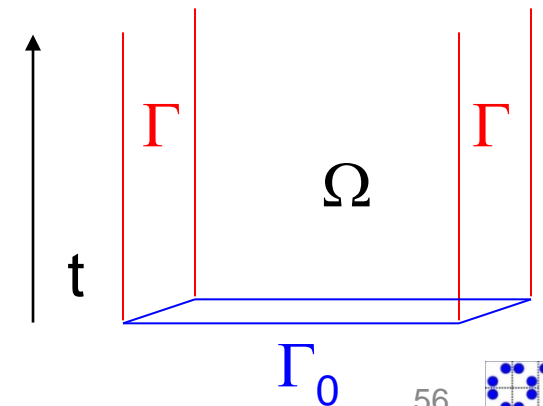


Beispiele:
stationäre Temperaturverteilung,
Ladungsverteilung, Potential.

Parabolische PDE: Gegeben sind Anfangs- und Randwerte.

Also $\Delta u = u_t$ auf Gebiet Ω und

$u(x,0)$ auf Γ_0 zum Zeitpunkt $t=0$,
und $u(x,t)$ vorgegeben auf Γ , dem
Rand von Ω .

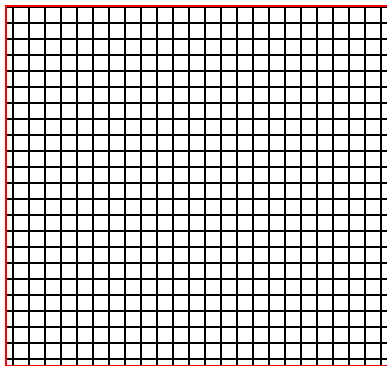


Lösungsmethoden am Beispiel Laplacegleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{auf Gebiet } \Omega \text{ und } u(x) \text{ auf } \Gamma$$

Differenzenverfahren:

Ersetze Differentialquotient durch Differenzenquotienten.
 Das Gebiet Ω wird diskretisiert, d.h. durch ein Punktegitter x_{jk} , $j=1, \dots, n$, $k=1, \dots, m$, dargestellt:

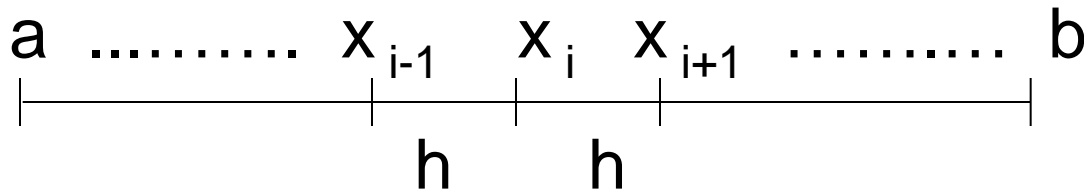


**$u(x) \rightarrow u_{jk} = u(x_{jk})$,
 am einfachsten äquidistant mit
 konstanter Schrittweite h .**

1-dimensionaler Fall:

$$-u_{xx} = f \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a)=v; \quad u(b)=w;$$



$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} = u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -f_i$$

ergibt lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u(a) \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u(b) \end{pmatrix}$$

Filter-Maske: $[-1 \quad 2 \quad -1]$

In 2D: -1

Maske: $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$ entspricht Differenzfilter

Zu Lösen: spezielles lineares Gleichungssystem!

Anderer Ansatz: „Finite Elemente“, Galerkinverfahren:

Wähle Ansatzfunktionen $u_i(x)$: Randbedingungen, Diff‘barkeit

(z.B. lineare B-Splines = Hut-Funktion, die genau an der Stelle x_i gleich 1 sind, und an den anderen Stützstellen gleich 0).

Setze $u(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$ als Ansatz für die gesuchte Lösung.

← endlich!

Suche also Koeffizienten c_i , so dass DGL ‚möglichst gut‘ erfüllt ist.

Die Differentialgleichung selbst ist so direkt nicht erfüllbar!

Umformulierung der DGL als Variationsproblem:

$$u_{xx} + f \equiv 0 \Leftrightarrow \int_a^b (u_{xx} + f)v(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v(x)$$

Setze in diese Gleichung für $u(x)$ den Ansatz mit den Basisfunktionen, und für $v(x)$ ebenfalls alle Basisfunktion.

$$\int_a^b \left(\sum_i c_i u_{i,xx}(x) + f(x) \right) u_k(x) dx = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n$$

$$\sum_{i=0}^n \overbrace{\left(\int_a^b u_{i,xx}(x) \cdot u_k(x) dx \right)}^{a_{ki}} c_i = - \overbrace{\int_a^b f(x) u_k(x) dx}^{b_k}$$

für $k = 0, \dots, n$

ergibt: $A^*c = b$

also ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Koeffizienten c_i .

Nach Lösen des LGS liefert

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$$

eine Näherungslösung der gegebenen PDE.

Ansatzfunktionen $u_i(x)$ sind so zu wählen, dass sie ‚vernünftig‘ diff’bar sind und die Randbedingungen erfüllen!

Multigridverfahren:

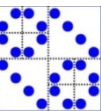
Wende (gedämpftes) Jacobi-Verfahren (oder Gauss-Seidel) zur Lösung der entstandenen LGS an.

Liefert Folge von Näherungslösungen $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$

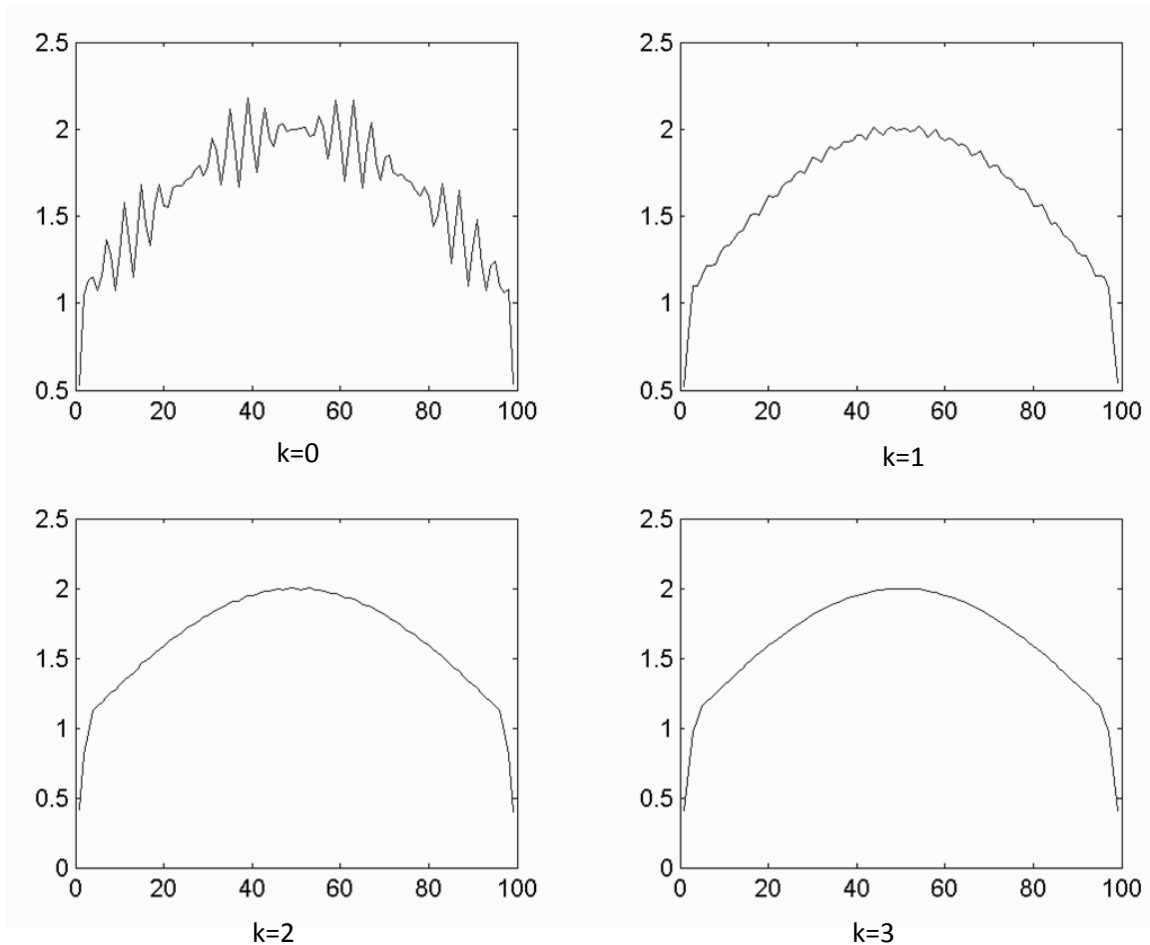
Beobachtung:

Nach wenigen Iterationen sind die hochfrequenten Fehleranteile verschwunden.

Zur Veranschaulichung:



Vektor $r_k = b - Ax_k$ komponentenweise aufgetragen nach k -tem Iterationsschritt des gedämpften Jacobi-Verfahrens:



Idee:

Betrachte nach k Schritten mit Näherung x_k neues Gleichungssystem (Korrekturgleichung)

$$A(x_k + x) = b \Leftrightarrow Ax = b - Ax_k \Leftrightarrow Ax = r_k$$

r_k ist durch Iteration ‚glatt‘ geworden und kann genauso gut auf einer gröberen Diskretisierung dargestellt werden!

In der Sprache der Wavelets:

Zerlegt man r_k in glatten Mittelwertanteil und rauhen Differenzanteil, so ist der hochfrequente Differenzanteil praktisch Null.

Projiziere LGS mittels Wavelet-Mittelwert-Filter auf halb so großes LGS und löse $A_{\text{grob}} x_{\text{grob}} = r_{k,\text{grob}}$ auf grobem Gitter.

Projiziere Korrektur x_{grob} wieder nach oben auf feines Gitter
→ Korrektur x

Diese Idee ist nun rekursiv auch grobem Gitter auf A_{grob} anwendbar, also wieder Jacobi-Iteration plus Wavelet-Filter.

Gesamtschau:

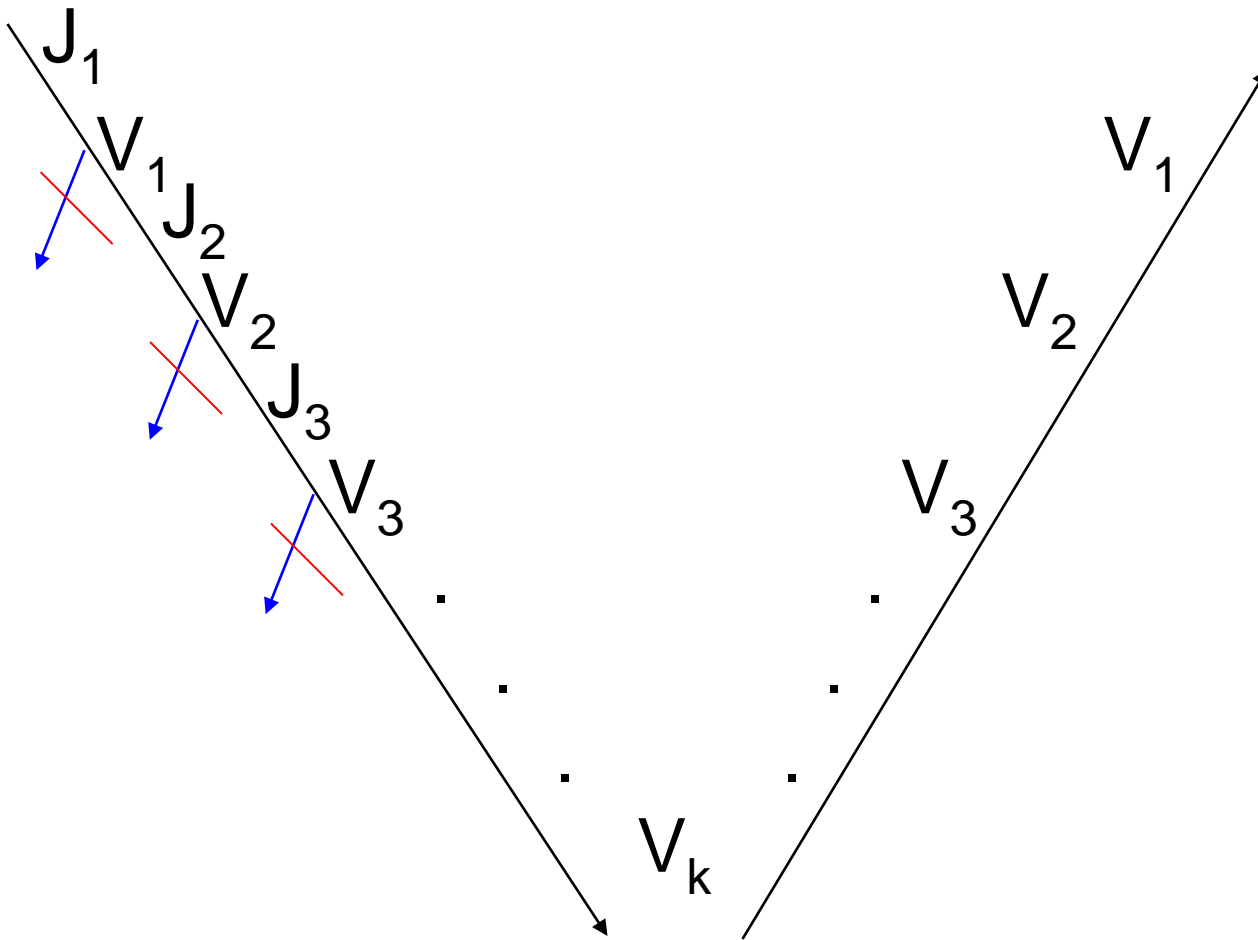
Rekursive Wavelet-Aufspaltung in rauhen und glatten Anteil.

Glättung durch Jacobi-Iteration und

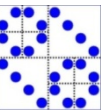
Projektion des glatten Anteils.

Lösen des groben Problems und Rückprojektion der Korrektur

V-Zyklus:



J: Jacobi-Iteration, V: Projektion/Rückprojektion



Also erst ein paar Schritte Gauss-Seidel:

$A=L+D+U$, $Ax=b$:

$$(L + D)x_{k+1} = b - Ux_k$$

Dann Wechsel zum Residuum zur Berechnung einer Korrektur:

$$A(x_k + x) = b \Leftrightarrow Ax = b - Ax_k \Leftrightarrow Ax = r_k$$

Dann Projektion=Restriktion auf grobe Diskretisierung,
z.B. mittels $[1 \ 2 \ 1]$:

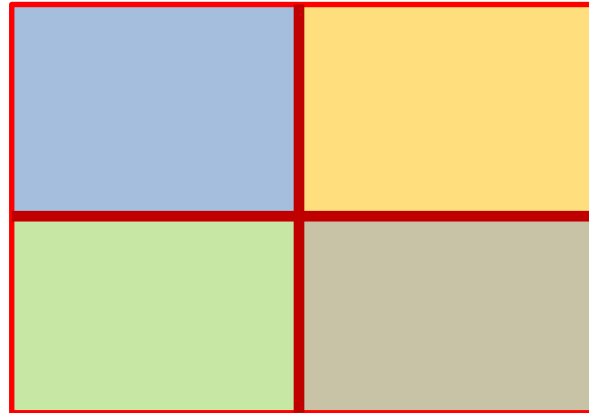
Löse $A_{grob}x_{grob} = r_{k,grob}$ ergibt grobe Korrektur x_{grob} .

Projeziere=Prolongiere grobe Korrektur auf feines Gitter
z.B. mittels Maske $[1 \ 2 \ 1]^T$

und addiere feine Korrektur auf x_k

Wiedehole die Schritte rekursiv und iterativ.

Gebietszerlegungs-Verfahren:



Löse die Differentialgleichung auf den 4 Teilgebieten.
Problem: Neue unbekannte “Rand”-werte.

Im ersten Schritt: grobe/null-Randwerte im Innern.

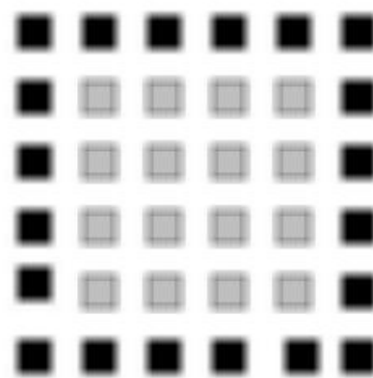
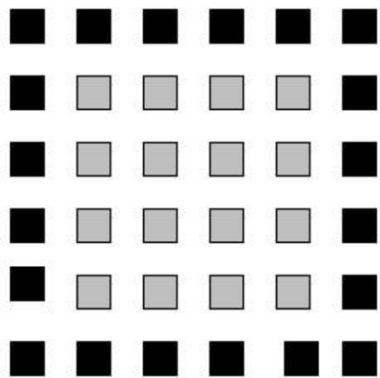
Später:

Übernahme berechnete Randwerte des Nachbargebiets.

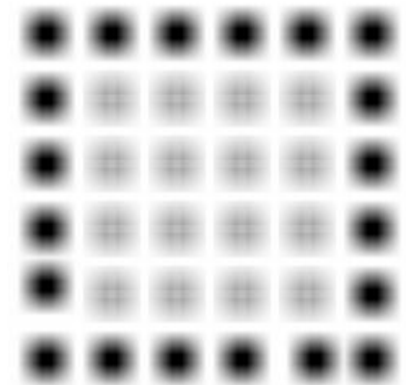
Löse Teilprobleme mit immer besseren “Rand”-werten.

Diffusionsgleichung und Bild- verarbeitung:

Original



Aufnahme



Betrachte Bild als Momentaufnahme einer zeitabhängigen Strömung. Man kann sich vorstellen, dass die vorliegende Aufnahme durch einen Diffusionsprozess entstanden ist.

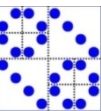
$$u_t = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u)$$

Veränderung des Bildes durch Zurückrechnen des Diffusionsprozesses.

(Lösung der Diffusionsgleichung $\leftrightarrow \Delta^{-1} \leftrightarrow$
Mittelwert-Filter, Weichzeichner)

Betragsmäßig großer Gradient zeigt Kanten an.
Außerdem ist das Bild ev. gestört durch Rauschen.
Ziel: Entferne Rauschen unter Beibehaltung der Kanten.

Wähle daher Diffusionskoeffizient D in Abhängigkeit vom Gradienten:



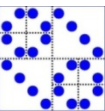
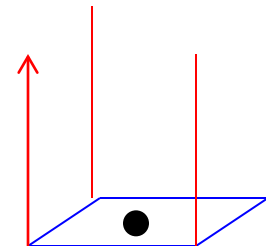
D

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{1}{1 + |\nabla u|^2 / \lambda^2} \cdot \nabla u \right)$$

Effekt: Gradient nahe bei Null ergibt $D \approx 1 \rightarrow$
 Normale Diffusion (LGS lösen entspricht
 Weichzeichner zur Noise-Reduktion)

Gradient groß \rightarrow ‚Rückwärts‘-Diffussion, Bild wird
 schärfer, Kanten bleiben erhalten.

$$u_{k+1,ij} = u_{k,ij} + \Delta t * \operatorname{div}(\dots)_{ij} \quad t$$



Wichtige Partielle Differentialgleichungen:

Wärmeleitung: $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ $u(x,t)$: Temperatur

Navier-Stokes: $\partial_t u = \nu \Delta u - \nabla p + f$, $\nabla \cdot u = 0$. Strömung,
Geschwindigkeit u , Druck p

Schrödinger: $i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + Vu$ Quantenmechanik, Aufenthaltswahr.

Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ beschreibt Ausbreitung einer Welle

Helmholtz: $\Delta v + \omega^2 v = 0$ spezielle Lösungen der Form $u = v(x)e^{i\omega t}$

Maxwell: $\partial_t E = \nabla \times B - J$, $\partial_t B = \nabla \times E$, $\nabla \cdot E = \rho$, $\nabla \cdot B = 0$.

Black-Scholes: $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$. Aktienpreis S , Option $\sim V$

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_equations

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_nonlinear_partial_differential_equations#List_of_equations

Ergänzungen:

Krylovraum

QR-Algorithmus