

# VII. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

## 7.1. Gewöhnliche Diff'gleichungen (erster Ordnung)

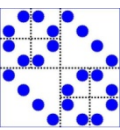
Frage: Warum Differentialgleichungen?

Diff'gleichungsproblem allgemein: Aus Beziehungen zwischen den Änderungen (Ableitungen) und den Funktionswerten soll eine gesuchte Funktion bestimmt werden!

**Aufgabe: Funktion  $y(x)$  nur implizit gegeben durch Bedingungen an die Ableitung  $y' \rightarrow y$  ??**

$$y' = \varphi(y, x) \quad \rightarrow \quad y(x) ?$$

Ableitung von  $y(x)$  nach  $x$  in jedem möglichen Punkt  $(x, y)$  ist gegeben durch Funktion  $\varphi(x, y)$ .



Kugel wird aus Höhe  $h_0$  losgelassen zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$ , Erdbeschleunigung  $g$ .

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt},$$

$$-g = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Diff'gleichung für  $v(t)$ :  $\dot{v}(t) = \varphi_1(v, t) = -g \quad (= \ddot{s}(t))$

Integration  $\rightarrow$   $v(t) = \int_0^t \dot{v}(\tau) d\tau = \int_0^t (-g) d\tau = -gt;$

Diff'gleichung für  $s(t)$ :

$$\dot{s}(t) = \varphi_2(s, t) = v(t) = -gt$$

Integration  $\rightarrow$  
$$s(t) = h_0 + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Aus Anfangswerten  $t_0 = 0$  und  $h_0$ , und aus der Bedingung für die Ableitung wird die Funktion selbst bestimmt.

In dieser einfachen Form explizit lösbar durch Quadratur!

Im Allgemeinen ist das Integral nicht direkt lösbar,  
oder

Diff'gleichung kann nicht auf Integral zurückgeführt werden.

## 7.1.2. Definition: Anfangswertproblem (AWP)

Aus Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  und  
 Differentialgleichung  $y'(x) = \varphi(y, x)$  soll  
 die Funktion  $y(x)$  für  $x > x_0$  bestimmt werden.

Dabei ist die Diff'gleichung hier in expliziter Form gegeben,  
 d.h. in der Form:  $y'(x) = \dots$

Impliziter Fall:  $\varphi(y', y, x) = 0 \rightarrow y' ???$

( Beispiel implizit:  $y' \cdot \exp(y') = y + x$  )

### 7.1.3. Beispiel für explizit lösbare Diff'gleichung:

$$y'(x) = \varphi(y, x) = \alpha y \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

Lösung durch Integration (Separation der Variablen)

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \alpha \cdot dx$$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x \alpha dt$$

$$\ln(y(x)) - \ln(y(x_0)) = \alpha(x - x_0)$$

und daher  $y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$

Beachte:  $y$  manchmal als einfache Variable,  
manchmal als Funktion  $y(x)$ .

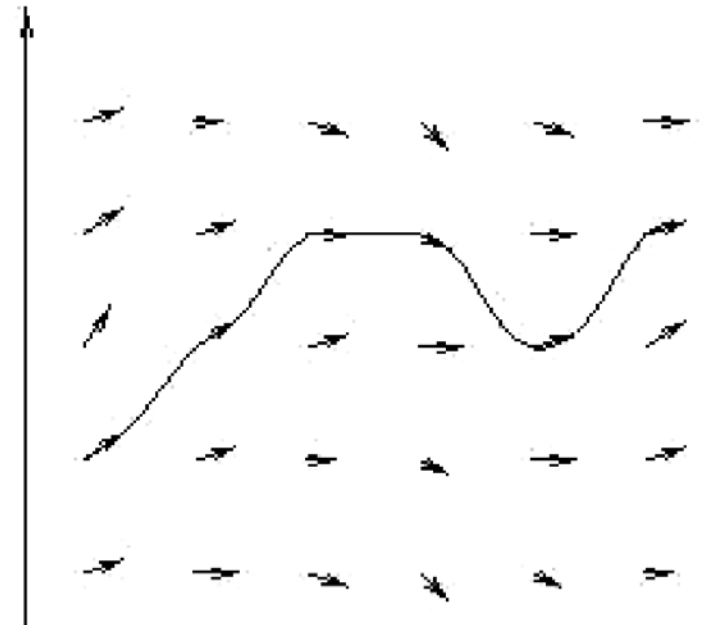
Von einer Funktion sind alle möglichen Ableitungswerte an allen möglichen Stellen  $(x,y)$  bekannt

(also überall an allen potentiellen Funktionswerten)

Dies entspricht einem Vektorfeld von Tangentenrichtungen

Weiterhin bekannt ist der Funktionswert an einer Stelle  $x_0$ .

Gesucht: Kurve durch  $(x_0, y_0)$ , deren Tangenten in allen Punkten dem vorgegebenen Vektorfeld entspricht!





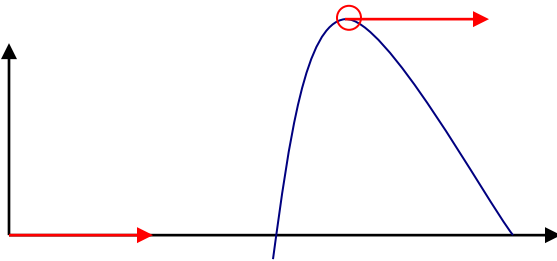
Im Beispiel ‚Freier Fall‘ ist dieses Vektorfeld trivial:



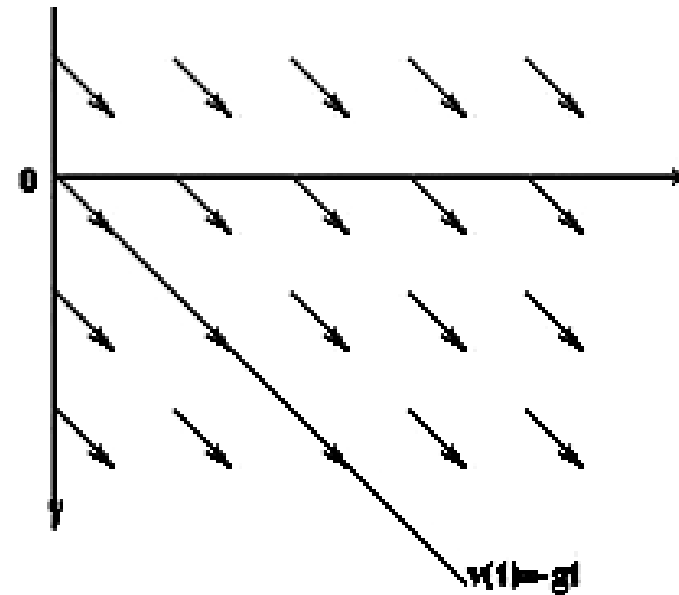
$$\dot{v}(t) = -g, \quad v(t_0) = 0. \quad \text{Kurve } (t,v) \leftrightarrow v(t)$$

In der  $(t,v)$ -Ebene ist jede Tangentenrichtung durch den Vektor  $(1,v')^T$  gegeben, Ableitung von  $(t,v(t))$ , also hier durch den Vektor  $(1,-g)^T$ .

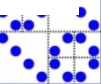
**$v'=0$ : Tangentenvektor  $(1,0)^T$**



Tangentenvektor  $(t,v)' = (1,v')$



**Die Lösungskurve ist dann die Gerade mit Steigung  $-g$  durch den Nullpunkt, also  $v(t) = -gt$ .**



## 7.1.5. Das Eulerverfahren:

Gegeben AWP Anfangswertproblem

$$y'(x) = \varphi(y, x) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

Gesucht:  $y(x)$  für  $x \geq x_0$

Wir wollen  $y(x)$  bei  $x_0$  lokal als lineare Funktion  $g(x)$  betrachten, und einen kleinen Schritt der Länge  $h$  zu  $x_1 = x_0 + h$  entlang dieser linearen Näherung gehen.

Dadurch erhält man den Näherungswert

$$y(x_1) \approx y_1 = g(x_1) = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot \varphi(y_0, x_0)$$

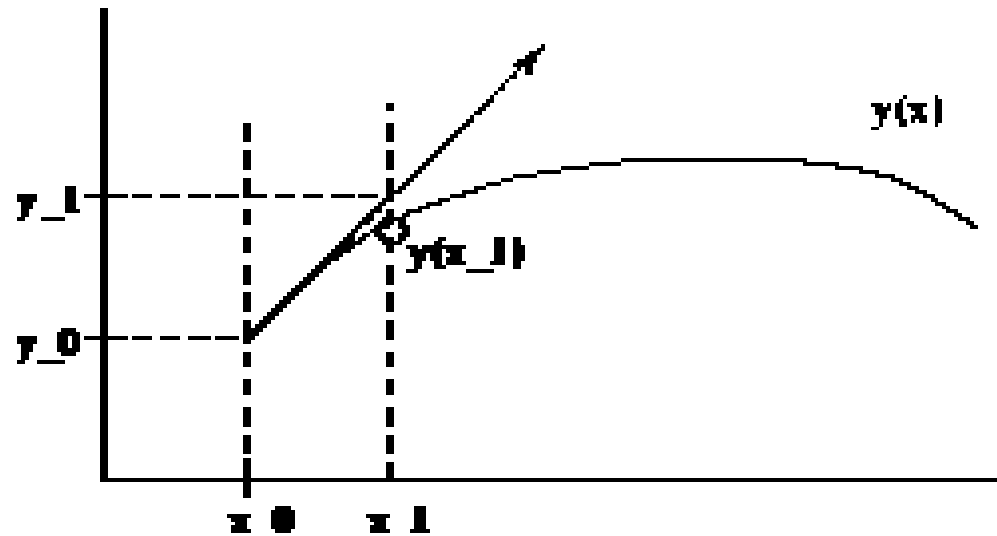


Ersetze wieder Funktion lokal durch Tangentengerade!

Dies ergibt die Iterationsvorschrift des **Eulerverfahrens**  
(Vorwärts-Euler):

$$y_0 = y(x_0); \quad x_{k+1} = x_k + h; \quad y_{k+1} = y_k + h \cdot \varphi(y_k, x_k) \quad \text{für } k=0,1,\dots$$

Der Einfachheit halber wählen wir die Schrittweite  $h$  konstant  
(muss aber nicht sein).



## Euler aus Integration:

Betrachte die Diff'gleichung zwischen  $x_0$  und  $x_1 = x_0 + h$ :

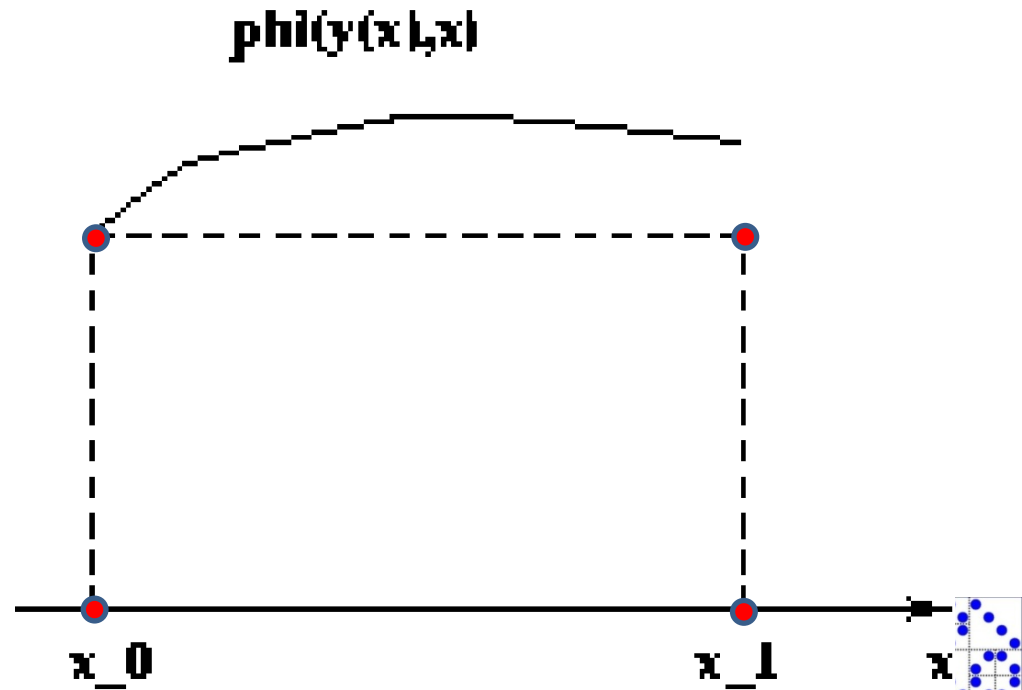
$$y_1 - y_0 = y(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(y(x), x) dx \approx (x_1 - x_0) \cdot \varphi(y_0, x_0).$$

aus Rechteckregel, indem die Fläche unter der Kurve  $\varphi(y(x), x)$  angenähert wird durch die Fläche des Rechtecks mit den Ecken

$(x_0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$ ,

und

$(x_1, \varphi(y_0, x_0))$ ,  $(x_0, \varphi(y_0, x_0))$ .



## Eulerverfahren aus Taylorentwicklung :

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(z_0)$$

Bekannt sind  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = \varphi(y_0, x_0)$ ,  
 mit Zwischenstelle  $z_0$ . Der  $h^2$ -Term ist klein und wird  
 vernachlässigt  $\rightarrow$  Eulerverfahren.

## Euler aus der Diskretisierung des Differentialquotienten:

$$\varphi(y_0, x_0) = y'_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

ergibt wieder das Eulerverfahren!

### 7.1.6.1. Rückwärts-Euler:

Der Diff'quotient kann natürlich mit derselben Berechtigung angenähert werden durch

$$\varphi(y_1, x_1) = y'_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Dies führt zu der Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \varphi(y_{k+1}, x_{k+1})$$

Vorteile? Nachteile?

Im Unterschied zum einfachen Euler taucht hier die Unbekannte  $y_{k+1}$  auch noch in der Funktion  $\varphi$  auf; das macht die Sache komplizierter.

$$y_{k+1} - \left( y_k + h \cdot \varphi(y_{k+1}, x_{k+1}) \right) = 0$$



Um  $y_{k+1}$  zu erhalten, ist die Nullstelle einer Funktion zu bestimmen, nämlich von

$$f(z) := z - h \cdot \varphi(z, x_{k+1}) - y_k \stackrel{!}{=} 0$$

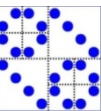
Die berechnete Nullstelle  $\bar{z}$  ist dann die nächste Näherung

$$\bar{z} = y_{k+1} \approx y(x_{k+1})$$

Solche Verfahren heißen **implizite** Verfahren, im Gegensatz zum einfachen Eulerverfahren, das ein **explizites** Verfahren ist.

Zur Bestimmung von  $y_{k+1}$  kann man iterative Verfahren wie z.B. das Newtonverfahren verwenden.

Explizites Euler als „Predictor“ liefert Startwert für implizites Euler / Newtonverfahren als „Corrector“



## 7.1.6.2. Weitere Taylorpolynom-Verfahren: Berücksichtigung höherer Terme in der Taylorentwicklung:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''(z_0)$$

mit Zwischenstelle  $z_0$ .

Hier taucht aber die unbekannte Ableitung  $y''(x_0)$  auf.  
Sie kann berechnet werden aus

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \varphi(y(x), x) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, x) \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y, x) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}$$

Benötigt: Partielle Ableitungen, Nachdifferenzieren (Kettenregel)



Also

$$y''(x_0) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, x) \Big|_{(y_0, x_0)} \cdot \varphi(y_0, x_0) + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y, x) \Big|_{(y_0, x_0)}$$

und damit

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_k, x_k) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_k, x_k) \cdot \varphi(y_k, x_k) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y_k, x_k) \right)$$

Auf diese Art können beliebig hohe Ableitungen der Lösungsfunktion  $y$  an einer Stelle  $(y_k, x_k)$  auf Ableitungen der Funktion  $\varphi$  zurückgeführt werden.

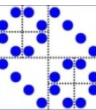
Die nächste Iterierte erhält man aus dem Anfang der Taylorentwicklung an der letzten Stelle  $x_k$ .

Man spricht hier auch von Einschrittverfahren da stets

$$y_k \rightarrow y_{k+1}$$

Modifizierung: Runge-Kutta; vermeide höhere Ableitungen durch Mehrfachauswertung von  $\varphi$ .

(vgl. Newton/Sekanten-verfahren)



Beispiel:  $y'(x) = \varphi(y, x) = yx;$

$$x_0 = 0; y(0) = 1;$$

Lösung:  $\frac{dy}{y} = x \cdot dx \Rightarrow \ln(y(x)) - \ln(y(x_0)) = \frac{x^2}{2} \Big]_{x_0}^x$

$$\Rightarrow y(x) = y(x_0) \exp\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right);$$

Euler:  $y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_k, x_k) = y_k + hy_k x_k = (1 + hx_k) y_k$

Rückwärts-Euler:  $y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_{k+1}, x_k) = y_k + hy_{k+1} x_k;$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - hx_k};$$





Beispiel:  $y'(x) = \varphi(y, x) = yx;$   
 $x_0 = 0; y(0) = 1;$

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, x) = \frac{\partial}{\partial y} (yx) = x; \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y, x) = \frac{\partial}{\partial x} (yx) = y;$$

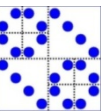
$$\frac{d}{dx} \varphi(y(x), x) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi \cdot y' + \frac{\partial}{\partial x} \varphi = x(yx) + y = y(x^2 + 1);$$

Taylor 2. Ordnung:

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_k, x_k) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_k, x_k) \cdot \varphi(y_k, x_k) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y_k, x_k) \right) =$$
$$= y_k + hy_k x_k + \frac{h^2}{2} (y_k (x_k^2 + 1)) = y_k \left( 1 + hx_k + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} x_k^2 \right);$$



MATLAB: `gewdiff_tayl.m`



Hier wird aus mehreren schon berechneten Iterierten das nächste  $y_{k+1}$  gewonnen, also

$$y_{k+1-m}, \dots, y_{k-1}, y_k \rightarrow y_{k+1}.$$

Solche Verfahren können sehr einfach aus Quadraturregeln hergeleitet werden, z.B.

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}) &= y(x) \Big|_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y'(x) dx = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(y(x), x) dx \approx \\ &\approx (x_{k+1} - x_{k-1}) \cdot \varphi(y_k, x_k) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Mittelpunktsregel.

Also

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h\varphi(y_k, x_k)$$

# Idee von Mehrschrittverfahren:

Vermeide Berechnung höherer Ableitungen und benutze die berechneten Funktionswerte selbst, um den weiteren Verlauf der Lösung anzunähern.

Also finde beste Gerade/Parabel ..., die durch die bisher berechneten Punkte geht.

## 7.1.7. AWP für Diff'gleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ :

Sei 
$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix}^T$$

Also 
$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \end{pmatrix}^T = \varphi(y, x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n, x) & \cdots & \varphi_n(y_1, \dots, y_n, x) \end{pmatrix}^T$$

mit vorgegebenem Startvektor

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \end{pmatrix}^T$$

Lösung genauso durch Euler im  $\mathbb{R}^n$ :

$$y^{k+1} = \begin{pmatrix} y_1^{k+1} \\ \vdots \\ y_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1^k, \dots, y_n^k, x_k) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1^k, \dots, y_n^k, x_k) \end{pmatrix}$$

## 7.1.8. AWP für Diff'gleichungen höherer Ordnung in IR:

Gegeben eine Bedingung für die  $j$ -te Ableitung der skalaren Funktion  $y(x)$

$$\frac{d^j}{dx^j} y(x) = y^{(j)}(x) = \Psi(y^{(j-1)}, \dots, y, x)$$

mit Anfangswerten

$$\begin{pmatrix} y^{(j-1)}(x_0) \\ \vdots \\ y(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^{(j-1)} \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Umformulieren in Diff'gleichung erster Ordnung im  $\mathbb{R}^j$  :

Definiere dazu Vektorfunktion  $u(x) = ( u_1(x), \dots , u_j(x) )^T$   
und setze

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= y(x) , \\ u_2(x) &:= y'(x) , \\ &\dots \\ u_j(x) &:= y^{(j-1)}(x) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für  $u(x)$

$$u'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_{j-1}'(x) \\ u_j'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ \vdots \\ u_j(x) \\ \Psi(u_j, \dots, u_1, x) \end{pmatrix} = \varphi(u, x)$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x_0) = \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ \vdots \\ u_j(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y^{(j-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(j-1)} \end{pmatrix}$$

Insgesamt kann man nun wieder das Vektor-Eulerverfahren anwenden:

$$u^{k+1} = u^k + h \cdot \varphi(u^k, x_k)$$

## 7.1.9. Fehleranalyse:

Start bei  $a = x_0$  ,

Gesuchter Wert  $b = x_n$  ,

Bei äquidistanter Einteilung ist Schrittweite  $h := (b-a)/n$

Damit  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j=0,1,\dots,n$

Definition lokaler Diskretisierungsfehler:

An der Stelle  $x_k$  ist der lokale Diskret.-Fehler gegeben durch

$$\left| y_{k+1} - y(x_{k+1}) \right| = \left| e_k \right|$$

Also der Fehler, der in einem Schritt von  $(y(x_k), x_k)$  nach  $(y_{k+1}, x_{k+1})$  entsteht.

$y(x_k)$  ist dabei der exakte Wert einer Lösung, nicht  $y_k$ !



Definition globaler Diskretisierungsfehler:

Für das AWP zur Bestimmung der Lösung an der Stelle  $b$  ist der globale Diskret.-Fehler gegeben durch

$$|y_n - y(b)| = |y_n - y(x_n)| = |g_n|$$

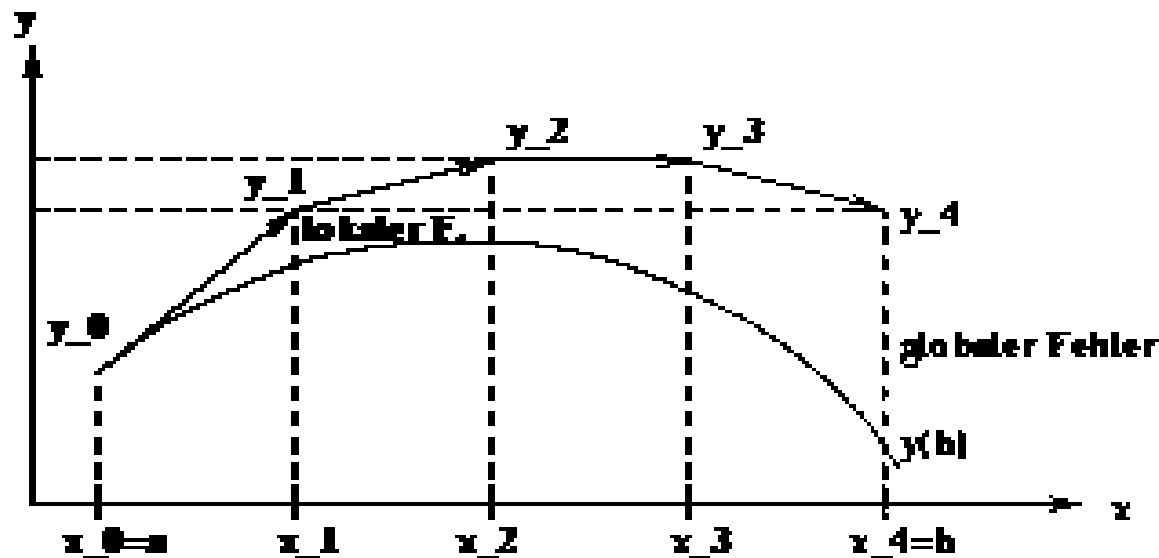
Definition der Konvergenz:

Die durch unser Lösungsverfahren erzeugte Folge heißt konvergent, wenn gilt

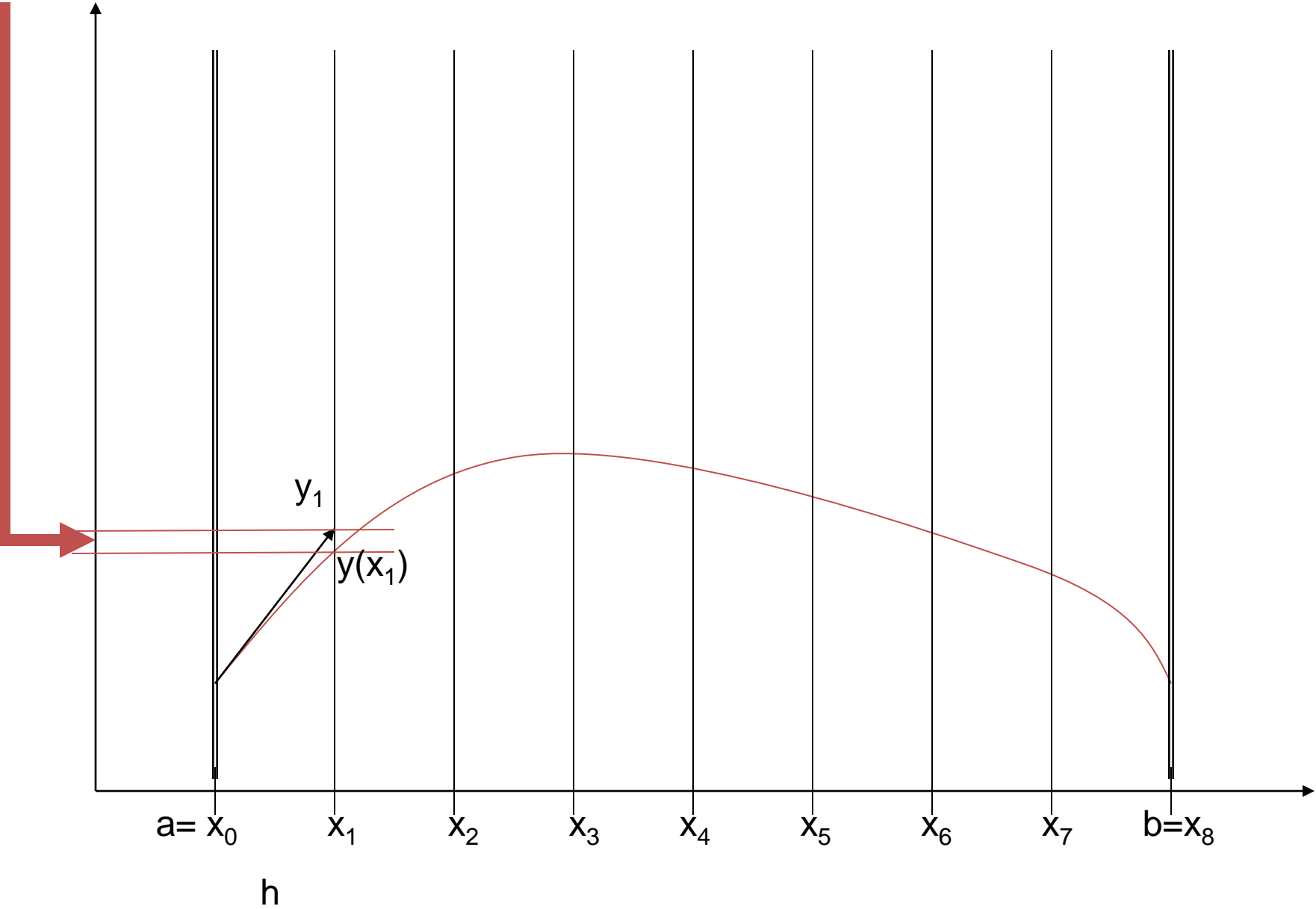
$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} y_n = y(b)$$

Wenn also in exakter Arithmetik bei immer feineren Unterteilungen der Näherungswert gegen den exakten Wert konvergiert.

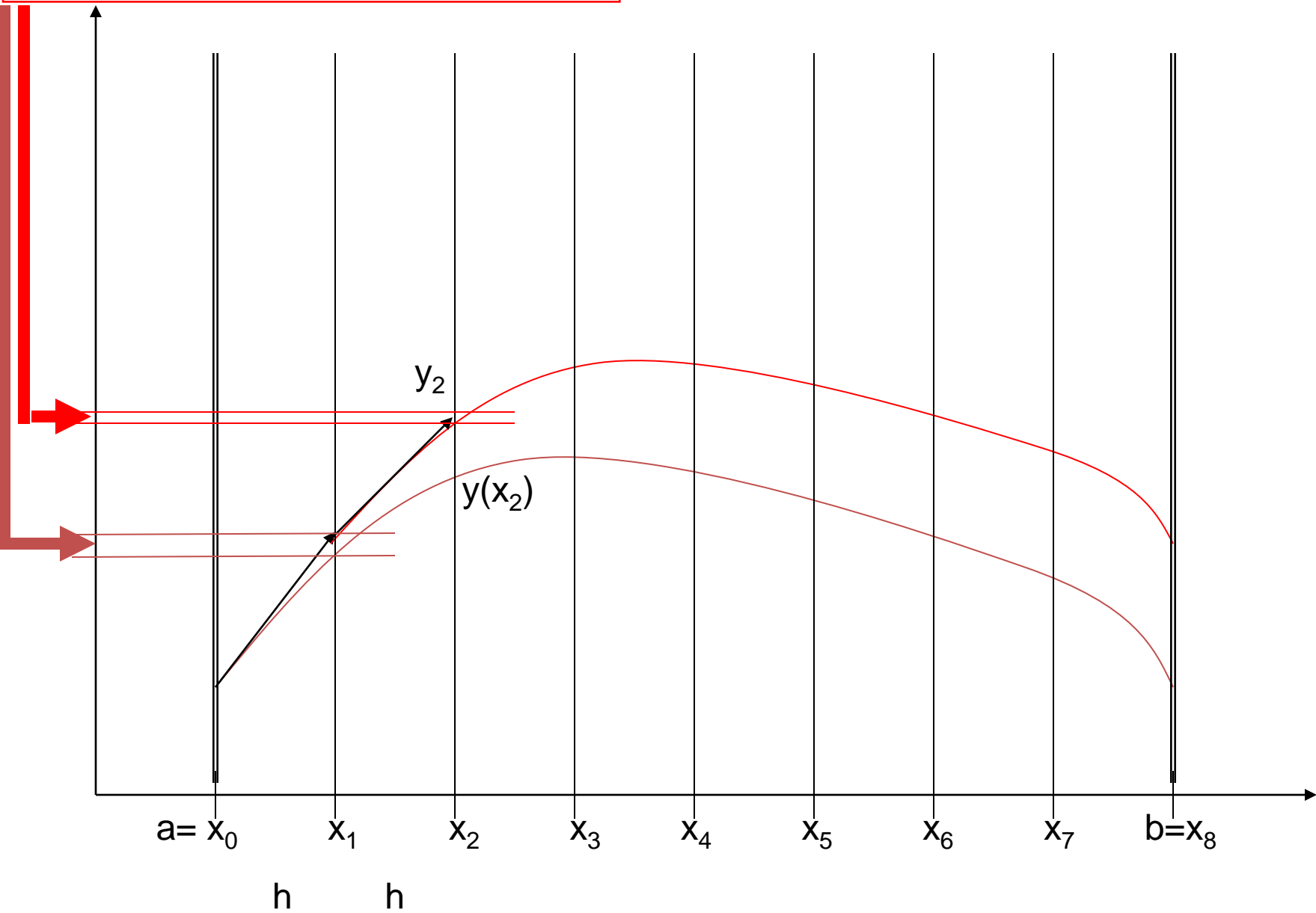
Das bedeutet natürlich auch, dass der globale Fehler gegen 0 gehen muss!



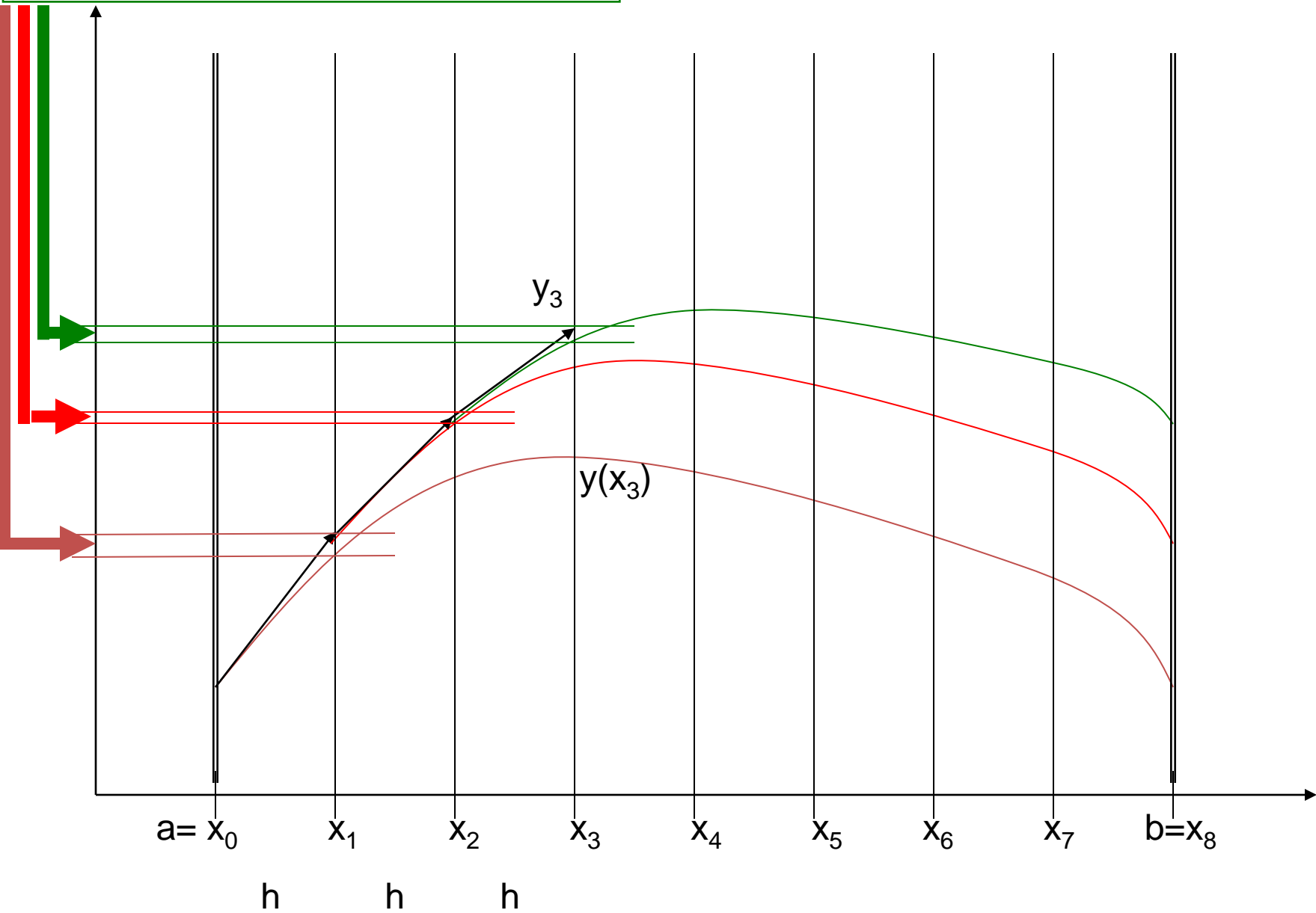
# Lokaler Diskretisierungsfehler



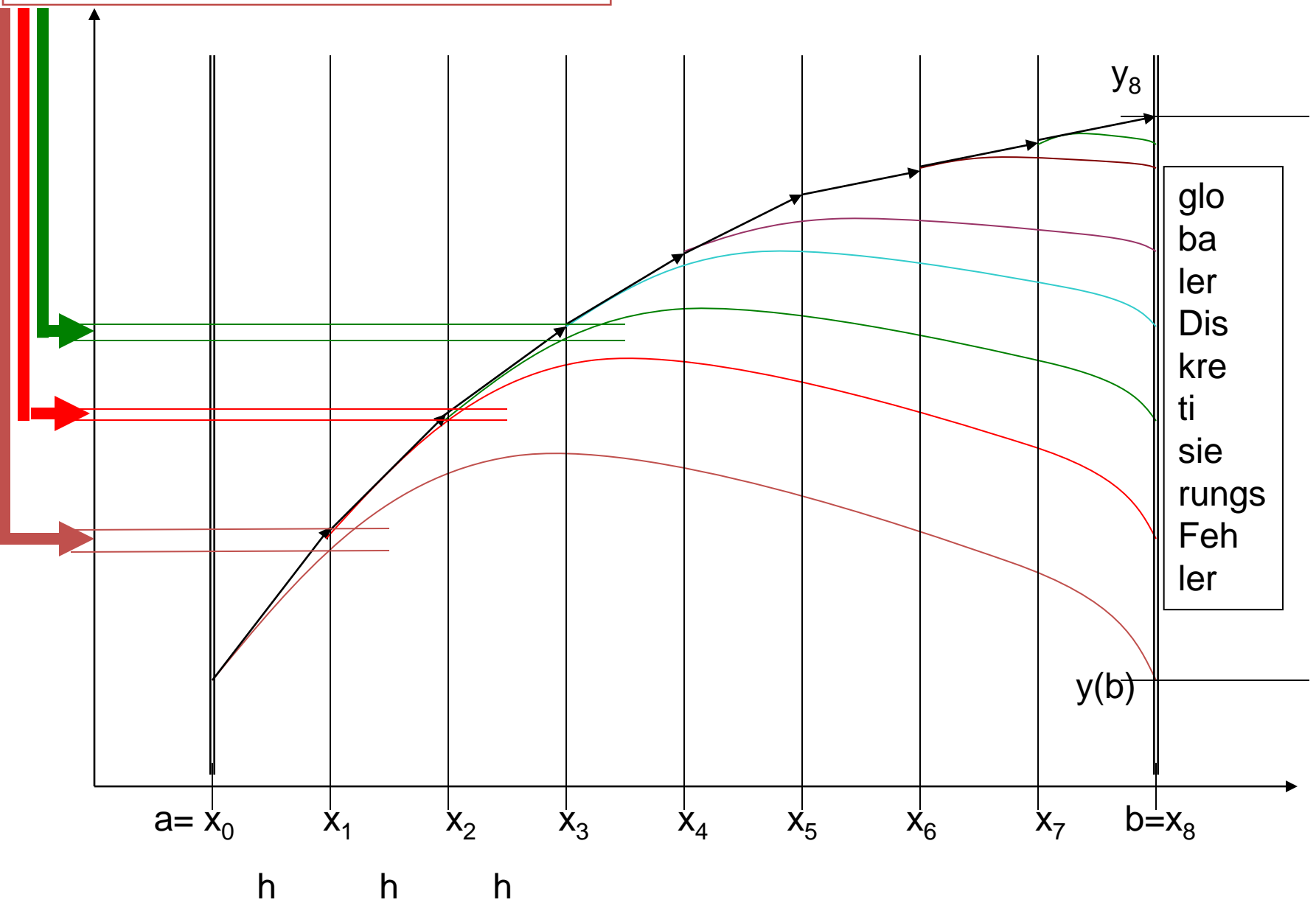
# Lokaler Diskretisierungsfehler



# Lokaler Diskretisierungsfehler



# Lokaler Diskretisierungsfehler



An jeder Stelle  $x_k$  treten neue lokale Fehler auf und addieren sich zum globalen Fehler.

Um insgesamt Konvergenz zu erhalten, muss also das Verfahren so sein, dass

- lokal ein genügend kleiner Fehler entsteht (Konsistenz) und
- sich diese lokalen Fehler nur zu einem kleinen globalen Fehler aufsummieren (Stabilität)(Konsistenz allein reicht nicht).

Definition Konsistenz:

Ein Verfahren heißt konsistent, wenn der lokale Diskretisierungsfehler überall mindestens von der Ordnung  $h^2$  ist, also

$$|y_1 - y(x_1)| = O(h^2)$$

Nur so ist für den globalen Fehler  $O(h^2)n = O(h)$  erreichbar!  
Denn es werden  $n$  Schritte benötigt von  $a=x_0$  bis  $b=x_n$ .

Ist  $|y_1 - y(x_1)| = O(h^{p+1})$  mit  $p \geq 1$ ,

so heißt das Verfahren von der Ordnung  $p$ .

Offensichtlich ist das Eulerverfahren konsistent von Ordnung 1, da gilt

$$|y(x_1) - y_1| = |y(x_1) - y_0 - h\varphi(y_0, x_0)| = \frac{1}{2}h^2|y''(z)|$$

mit einer Zwischenstelle  $z$ .



Zur Untersuchung der Stabilität beschränken wir uns als Modellfall auf den ‚linearen‘ Spezialfall

$$y' = \varphi(y,x) = \lambda y \quad \text{mit Lösung} \quad y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$$



Problem: Divergenz bei zu großer Schrittweite  $h$ !

Wie groß kann man  $h$  wählen? Wie klein muss  $h$  sein?

Für die berechneten Näherungslösungen gilt beim Eulerver.  
 auf  $y'(x) = \varphi(y, x) = \lambda y$  und  $y(x_0) = y_0$

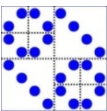
mit Lösung  $y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$  :

$$y_1 = y_0 + h\varphi(y_0, x_0) = (1 + h\lambda)y_0,$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_1 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0,$$

$$y_k = (1 + h\lambda)y_{k-1} = (1 + h\lambda)^k y_0.$$

Für  $|1+h\lambda| > 1$  wird daher die Näherungslösung  $y_k$  immer größer.



Für  $|1+h\lambda|<1$  geht die Näherungslösung  $y_k$  gegen 0.  
Stimmt dieses Verhalten mit der tatsächlichen Lösung  
überein?

Für die tatsächliche Lösung  $y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$  gilt

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

Im Fall  $\lambda > 0$  zeigen also exakte und Näherungslösung  
dasselbe Verhalten.

Kritisch ist der Fall  $\lambda < 0$  :

Die exakte Lösung geht gegen 0,  
die Näherungslösung aber nur dann, wenn  $|1+h\lambda| < 1$  gilt,  
d.h. nur wenn

$$h < 2 / |\lambda|$$

Dies ist die Stabilitätsbedingung, die garantiert, dass eine beschränkte exakte Lösung auch durch eine beschränkte Näherungslösung approximiert wird, und der globale Fehler nicht zu stark anwachsen kann.

Also ist für  $\lambda < 0$  das Eulerverfahren nur konvergent, wenn die Schrittweite  $h$  so klein gewählt ist, dass  $h < 2 / |\lambda|$  gilt !

Führen wir dieselbe Untersuchung für das implizite (Rückwärts) – Euler –Verfahren durch, so erhält man die Näherungslösungen von der Form

$$y_k = \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k}$$

# Rückwärts-Euler:

$$y_1 = y_0 + h\lambda y_1 \Rightarrow (1 - h\lambda)y_1 = y_0 \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1 - h\lambda}$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1}{1 - h\lambda} = \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^2}$$

$$y_k = \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k}$$

Im kritischen Fall  $\lambda < 0$  gilt hier unabhängig von  $h$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k} = 0$$

Das implizite Eulerverfahren erfüllt für alle  $h$  die Stabilitätsbedingung, nämlich dass exakte und Näherungslösung für  $\lambda < 0$  beschränkt bleiben!

Für  $\lambda > 0$  muss auch wieder gelten  $h < 2/\lambda$ , damit  $y_k$  das richtige Verhalten im Unendlichen hat.

Ist aber nicht so kritisch, da e-Funktion hier stark wächst.

Beispiel 2-dim linear:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(x) \\ \lambda_2 y_2(x) \end{pmatrix}$$

Dies entspricht zwei unabhängigen Diff'gleichungen, die hier zusammen in vektorieller Form z.B. mittels Euler gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} y_1^{k+1} \\ y_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^k \\ \lambda_2 y_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + h\lambda_1) y_1^k \\ (1 + h\lambda_2) y_2^k \end{pmatrix}$$

Die Stabilitätsbedingung hängt hier also von beiden  $\lambda$ 's ab:

$$h < 2 / |\lambda_i| \quad \text{für } i=1,2$$

oder

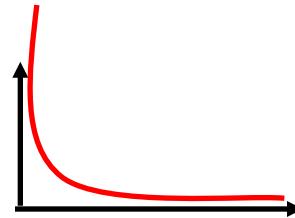
$$h < \min \{ 2 / |\lambda_1| , 2 / |\lambda_2| \}$$

Gilt nun  $\lambda_2 \ll \lambda_1 < 0$ , so wird die erlaubte Schrittweite  $h$  bestimmt von  $\lambda_2$ , also

$$h < 2 / |\lambda_2| .$$

Andererseits ist die dazugehörige Komponente in der Lösung

$$\textit{const} \cdot \exp(\lambda_2 x)$$



schon nach wenigen Schritten verschwindend klein und spielt dann für die eigentliche Lösung keine Rolle mehr!



$\lambda_2$  bestimmt dann also die Lösung nur in einem kleinen Bereich, die Schrittweite  $h$  beim Eulerverfahren aber überall!

Man spricht hier von ‚steifen‘ Diff.-gleichungen.

Offensichtlich ist in solchen Fällen das implizite Eulerverfahren wesentlich besser geeignet, da es keine Einschränkung der Schrittweite  $h$  durch die  $|\lambda_i|$  beinhaltet.

## 7.2. Anwendungsbeispiele:

### 7.2.1. Räuber-Beute-Modell

Einfaches Modell, das die Populationsänderung in einem ‚Primitiv-Ökosystem‘, bestehend aus genau einer Räuberspezies und einer Beutespezies, beschreibt.

Viele Räuber → Beute nimmt ab

Wenig Räuber → Beute nimmt zu

Viel Beute → Räuber nehmen zu

Wenig Beute → Räuber nehmen ab

Änderung der Anzahl Beutetiere  $x(t)$  ist zum einen durch die Geburtenrate  $a$  proportional der Anzahl Beutetiere, und zum anderen führt eine Begegnung eines Beutetiers mit einem Räuber ( $y(t)$ ) zu einer Verringerung (mit Sterberate  $b$ ):

$$\dot{x}(t) = ax - byx$$

Andererseits erhöht sich die Räuber-Zahl durch viele Begegnungen mit Beutetieren, während die Abnahme der Räuber von ihrer Sterberate  $d$  abhängt:

$$\dot{y}(t) = cxy - dy$$

Man erhält also zur Beschreibung der zeitlichen Änderung der Population von Räuber und Beute ein DGL-System:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

für  $t_0 \leq t \leq t_n$

$$\dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t)$$

mit Startwerten  $x(t_0) = x_0$  und  $y(t_0) = y_0$

Eulerverfahren mit Schrittweite  $\tau$  liefert dafür die Formel:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau} = ax_i - bx_i y_i$$

oder

$$x_{i+1} = x_i + \tau(ax_i - bx_i y_i)$$

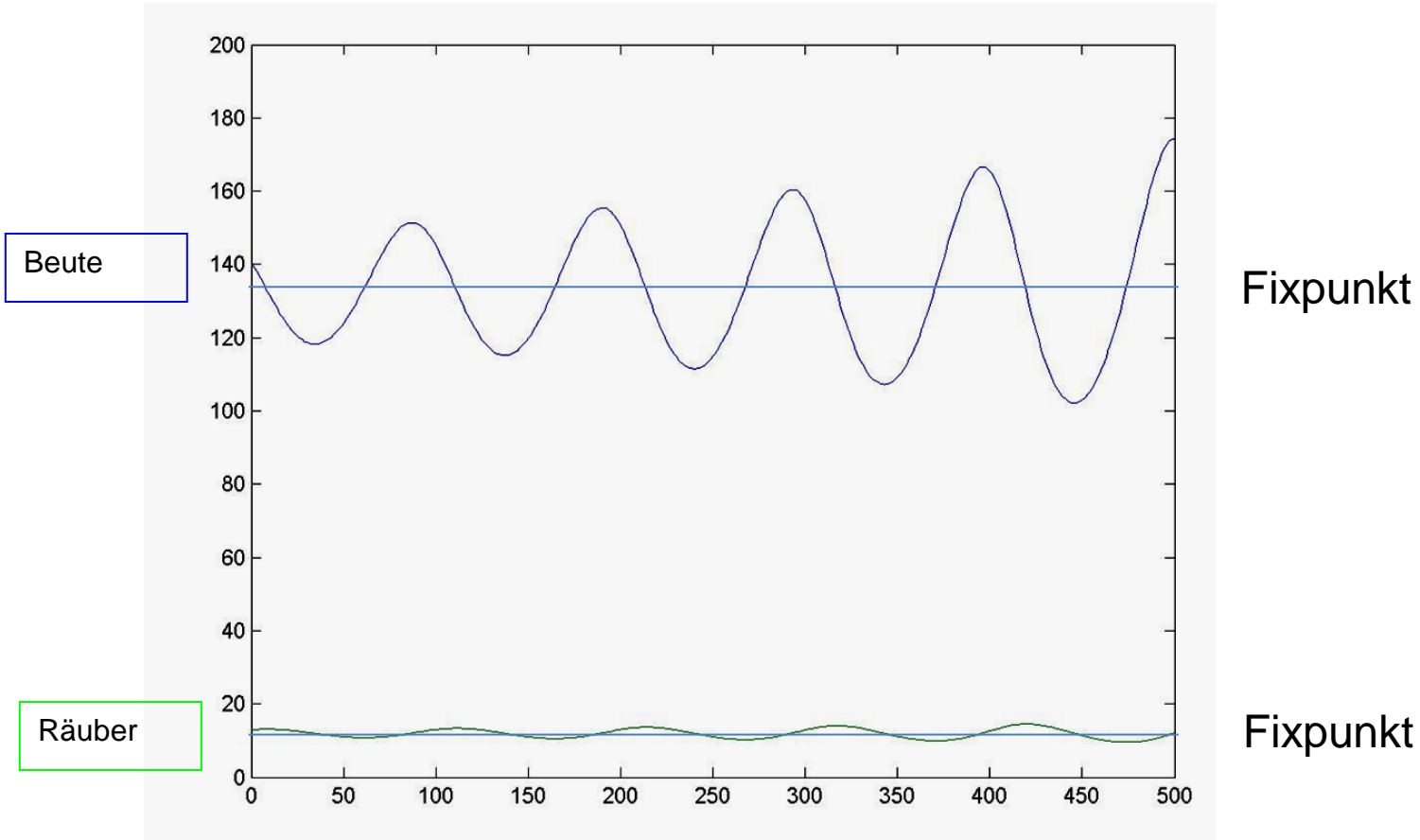
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = cx_i y_i - dy_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \tau(cx_i y_i - dy_i)$$

Fixpunkte dieser Vektoriteration:  $(x, y) = (d/c, a/b)$

# Populationsverlauf:

Parameter:  $a=.3$ ,  $b=.025$ ,  $c=.0015$ ,  $d=.2$



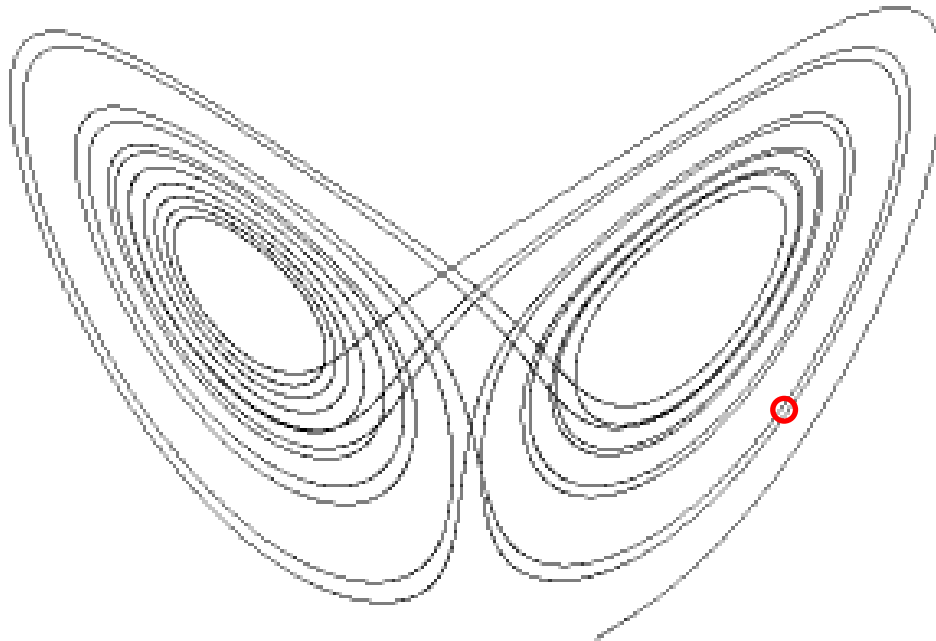
<http://www.leinweb.com/snackbar/wator/>

## 7.2.2. Lorenzattraktor:

Diff'gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1' &= a(x_2 - x_1) \\x_2' &= bx_1 - x_2 - x_1x_3 \\x_3' &= x_1x_2 - cx_3\end{aligned}$$

aus Modell für Beschreibung der Luftzirkulation in der Erdatmosphäre.



Wie bei der logistischen Parabel existieren zwei Attraktoren, zwischen denen die Lösungskurve chaotisch wechselt.

Daher führt eine minimale Änderung, z.B. der Anfangsdaten dazu, dass nach kurzer Zeit die Lösung sich an einer völlig anderen Position befindet

Der ‚Flügelschlag eines Schmetterlings‘ in China genügt, um nach einiger Zeit zu einer völlig anderen Lösung zu führen, z.B. einen Sturm in Europa auszulösen.

Daher ist es prinzipiell unmöglich, über längeren Zeitraum exakte Vorhersagen zu gewinnen, da leichteste Änderungen in den Anfangsdaten zu gänzlich anderem Lösungsverhalten führen.

Chaotisches Verhalten!



### 7.2.3. Beispiel für chaotisches Verhalten:

Logistische Parabel, Iteration mit Startwert  $x_0 \in [0,1]$  und Funktion

$$\Phi(x) := 4 \cdot x \cdot (1 - x)$$

Vergleiche Orbit bei Startwert  $x_0$  mit Orbit für Startwert  $y_0 = x_0 + 10^{-16}$

Numerisches Ergebnis in MATLAB:

$x_0 = 0.999999999$  liefert

$x_{44} = 0.0209$       und       $y_{44} = 0.9994$

Grund: Wiederholte Auslöschung

Chaos  $\leftarrow \rightarrow$  Schlecht konditioniert

Beispiel Wintersturm Lothar:

Ignorieren eines Messwertes  $\rightarrow$  Falsche Wetterprognose

# Gewöhnliche Differentialgleichung

- hat nur eine Unbekannte (z.B. x oder Zeit t)
- hat Anfangswerte gegeben.

Zu einer Diff'gleichung in einer Variablen x kann man auch ein Randwertproblem betrachten, z.B.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varphi(u, u', x) \quad \text{auf} \quad [a, b], \quad u(a) = u_a, \quad u_b = u_b$$

Hat eine Differentialgleichungen Ableitungen in mehr als einer Variablen, so spricht man von einer Partiiellen Differentialgleichung PDE