Beispiel: QR-Zerlegung für Least Squares:

$$\min_x \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min_x \|Ax - b\|_2$$

Erster Schritt: $a_{21} \rightarrow 0$:

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+s & c+s \\ s-c & s-c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$c = s = 1/\sqrt{2}, \qquad \varphi = \pi/4$$

Zweiter Schritt: $a_{32} \rightarrow 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & s & -c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & s \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $c = 0, \quad s = 1, \qquad \varphi = \pi / 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

Also $$Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Anwendung auf Minimierungsproblem :

$$\min_x \left\| Ax-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|_2 = \min_x \left\| \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} x - \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|_2 =$$

$$= \min_x \left\| \begin{pmatrix} \underline{\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2 = \min_x \left\| \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_2$$

Lösung x als Lösung des Dreiecksgleichungssystems:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall liefert x sogar eine genaue Lösung von Ax=b, da der Fehlerterm **$||b_2||$** gleich Null ist.

QR-Zerlegung ist in dieser Form anwendbar für beliebige rechteckige Matrix A, so lange A vollen Rang besitzt.

Kosten des QR-Verfahrens mit Givens für n x **n – Matrix:**

$2n^3 + O(n^2)$ (also teuerer als Gauss-Elimination mit $2n^3/3$)

Ein Eliminationsschritt bei Spalte k:

(2 mult +1 add)2k = 6k flop

Insgesamt: $\sum_{k=n-1}^{2} (k-1) * 6k = 2n^3 + O(n^2)$

Bei m x n – Matrix mit m>n und Rang(A)=n: $n^2\,(3m-n)$

Anwendung des QR-Verfahren bei

- schlecht konditioniertem Gleichungssystem

- überbestimmtem Gleichungssystem mit vollem Rang
  (an Stelle der Normalgleichung), wie oben beschrieben

- allgemeinem nichtquadratischen System in der Form
  QAP = R mit Permutation P zum Vertauschen von Spalten.
  (P ist nötig, um einen Block vollen Ranges nach vorne/oben zu
  transportieren)

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Entdeckung fast linear abhängiger (eigentlich überflüssiger) Gleichungen (numerische Bestimmung des Rangs von A)

- Reduktion der Matrix auf den wesentlichen Teil (Noise-reduction)

$$A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \approx Q_1 \cdot \begin{pmatrix} R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 R & Q_1 S \end{pmatrix}$$

3.10 Regularisierung

In vielen praktischen Anwendungen hat man zwar ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem vorliegen, aber so, dass die Normalmatrix $\mathbf{A^T A}$ auch noch (fast) singulär ist!

Dadurch erhält man bei der Lösung dieses Problems einen Vektor x, der extrem groß ist:

Ist in Bx=b die Matrix B (fast) singulär →

→ ||inv(B)|| sehr groß →

→ || x || = || inv(B)*b || sehr groß

Durch Mess/Rundungsfehler enthält aber die rechte Seite b viele kleine Störungen (noise, Rauschen), die in der berechneten Näherungslösung x dann sehr groß werden, so dass - selbst bei exakter Rechnung - x unbrauchbar ist.

$$\tilde{x} = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = x + \underbrace{B^{-1}\Delta b}_{\substack{\text{Störanteil} \\ \text{Viel größer als x}}}$$

Ausweg:

Suche ‚vernünftige' Least Squares Lösung durch Minimierung mit Nebenbedingung: ‚x soll nicht zu groß werden'.

$$\min_x \left(\left\| Ax - b \right\|_2^2 + \gamma^2 \left\| x \right\|_2^2 \right)$$

Minimerung ←→ Nullstelle der Ableitung führt auf das sog. regularisierte Gleichungssystem

$$\boxed{\left(A^T A + \gamma^2 I \right) x = A^T b}$$

Idee: Verschiebe A^TA durch Aufaddieren von γ^2 I , so dass die neue Matrix besser konditioniert ist.

Dann ist $$\left\| inv\left(A^T A + \gamma^2 I\right)\right\|_2 << \left\| inv(A^T A)\right\|_2$$

Daher führen in dem neuen Gleichungssystem die Rausch-komponenten in b nicht mehr zu einem extremen Anwachsen der Lösung x.

Man weiß, dass die gesuchte Lösung x nicht zu groß sein kann, und dies wird durch die Regularisierung gewährleistet.

γ heißt Regularisierungsparameter und die hier beschriebene Methode heißt

Tikhonov-Regularisierung.

Regularisierung muss häufig angewendet werden bei Problemen der Bildverarbeitung

(z.B. bei verrauschten, unscharfen Bilder)

Regularisierende Zusatzbedingungen:

- Beschränktheit der Lösung $||x||$
- Ev. Dünnbesetztheit der Lösung $(x_1,0,\ldots 0,x_k,0,\ldots,0)$
- Ev. Glattheit der Lösung $\Delta x_i \approx 0$
- Nähe zu schon bekannter Näherungslösung $||x-x_{approx}||$

- Gauss-Elimination,
- Normalengleichung und QR-Zerlegung,
- Regularisierung

sind die wichtigsten Werkzeuge zur direkten Lösung von $Ax=b$.

IV. Interpolation und Quadratur

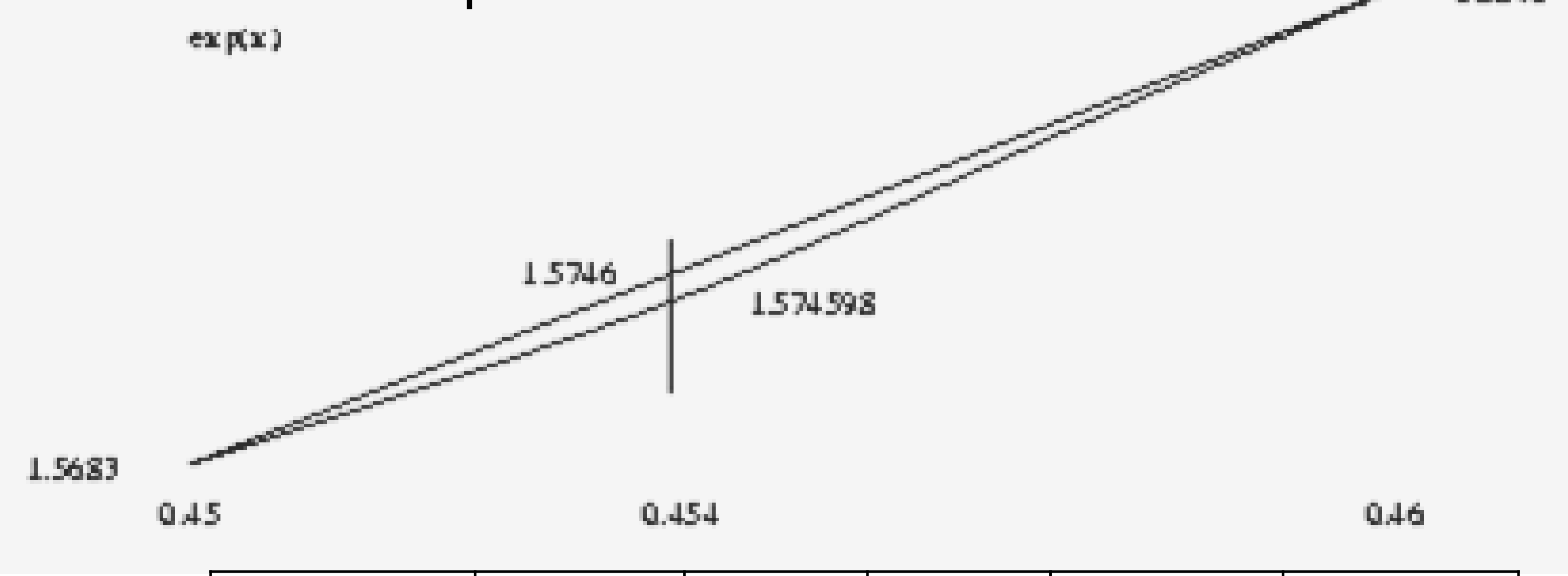
4.1. Interpolation

4.1.1. Beispiel: Interpolation mit Tafelwerken für exp, sin, cos, log

Gesucht: exp(0.454) ;

Tabelliert: exp(0.45) und exp(0.46)

Lineare Interpolation.



x:	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46
exp(x):	...	...	...	1.5683	1.5841

4.1.2. Allgemeine Problemstellung:

Gegeben:

Punktepaare (x_j, y_j), j=0,1,...,n , paarweise verschieden, und linear unabhängige Funktionen $g_k(x)$, k=0,1,...,n

Gesucht: Koeffizienten c_k , k=0,1,...,n mit

$$G(x_j) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x_j) \overset{!}{=} y_j \qquad \text{für } j=0,1,\ldots,n$$

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(n+1)×(n+1) lineares Gleichungssystem

Interpolation führt auf quadratisches Gleichungssystem!
Genauso viele Bedingungen wie Freiheitsgrade.

Man unterscheide Interpolation und Approximation!

Beispiel zu *<u>Approximation:</u>*
Ausgleichsgerade führt auf überbestimmtes Gleichungssystem (Normalgleichung, QR)

4.1.3. Spezialfall Polynom-Interpolation:

Ansatzfunktionen $g_k(x)$ sind Polynome x^k

Gesucht: Koeffizienten c_k , k=0,1,...,n mit

$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} c_k x_j^k \overset{!}{=} y_j \quad \text{für } j=0,1,\dots,n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

n+1 Gleichungen für n+1 Unbekannte: Teuer! $O(n^3)$

4.1.4. Lösung mit Lagrange-Polynomen

Definiere geschickt Basis-Polynome:

$$L_j(x) := \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}$$

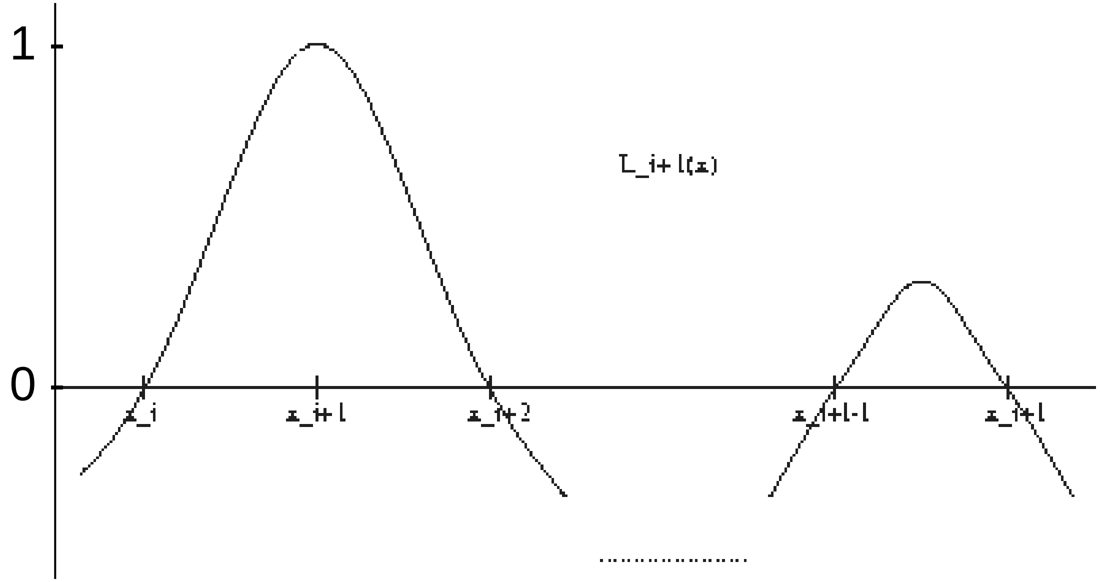
n+1 Polynome vom Grad n, besser als 1, x, x^2, .., x^n

Eigenschaften der Lagrange-Polynome: Grad n mit

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & falls \quad i = j \\ 0 & falls \quad i \neq j \end{cases}$$

Gesucht $\quad p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j L_j(x)$

das die Interpolationsbedingungen erfüllt.



Aus diesen Eigenschaften ergibt sich zur Lösung des Interpolationsproblems ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} L_0(x_0) & \cdots & L_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_0(x_n) & \cdots & L_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist $c_j = y_j$; daher ist das Interpolationspolynom:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$$

denn es ist $p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$.

Damit ist die Existenz eines interpolierenden Polynoms gezeigt!

Eindeutigkeit?

Hauptsatz der Algebra:

Jedes Polynom p(x) vom Grad n kann als Produkt von n linearen Faktoren (den ev. komplexen Nullstellen z_k) geschrieben werden in der Form

$$p(x) = \alpha(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$$

Annahme: Es gibt zwei Polynome p und q vom Grad <= n,

die beide die Interpolationsbedingungen erfüllen.

Definiere neues Polynom h(x) := p(x) - q(x) . Dann gilt

$$h(x) = \alpha(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$$

und $h(x_j) := p(x_j) - q(x_j) = 0$ für j=0,1,...,n

Daher hat das Polynom h(x) den Grad n und n+1 Nullstellen.
Aus dem Hauptsatz der Algebra folgt daher, dass
$\alpha = 0$ sein muss, und daher ist $h(x) \equiv 0$, oder
$p(x) \equiv q(x)$.
Also es existiert <u>genau ein</u> Interpolationspolynom!

Lagrange zur Lösung der Interpolation nicht geeignet,
da numerisch problematisch und teuer.

4.1.5. Berechnung des Interpolationspolynoms

Löse nicht das lineare Gleichungssystem, da dies zu teuer ist! Außerdem wird oft nur der Wert des Polynoms an einer einzigen Stelle gesucht!

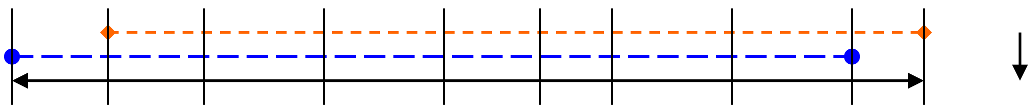
Idee: Berechne induktiv interpolierende Polynome für immer mehr Stützstellen.

Setze dazu $p_{i,\cdots,i+l}(x)$ als das interpolierende Polynom vom Grade l, das genau an den Stellen $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+l}$ die Interpolations-Bedingungen erfüllt.

Zur Bestimmung von $p_{i,\cdots,i+l}(x)$ verwende die interpolierenden Polynome vom Grade l-1 $p_{i+1,\cdots,i+l}(x)$ und $p_{i,\cdots,i+l-1}(x)$, die zu den Stützstellen $x_{i+1}, \cdots, x_{i+l}$, bzw. $x_i, \cdots, x_{i+l-1}$, gehören.

Wesentliche Formel :

$$p_{i,\cdots,i+l}(x) = \frac{(x-x_i)\,p_{i+1,\cdots,i+l}(x) - (x-x_{i+l})\,p_{i,\cdots,i+l-1}(x)}{x_{i+l}-x_i} \qquad (*)$$



Beweis: Nachprüfen der Interpolationsbedingung.

$$p_{i,\cdots,i+l}(x_i) = \frac{0-(x_i-x_{i+l})y_i}{x_{i+l}-x_i} = y_i$$

$$p_{i,\cdots,i+l}(x_{i+l}) = \frac{(x_{i+l}-x_i)y_{i+l}-0}{x_{i+l}-x_i} = y_{i+l}$$

und für alle anderen j mit i < j < i+l :

$$p_{i,\cdots,i+l}(x_j) = \frac{(x_j-x_i)y_j-(x_j-x_{i+l})y_j}{x_{i+l}-x_i} = y_j$$

Wegen der Eindeutigkeit des interpolierenden Polynoms ist jedes der so definierten Polynome genau die eindeutige Lösung des jeweiligen Interpolationsproblems!

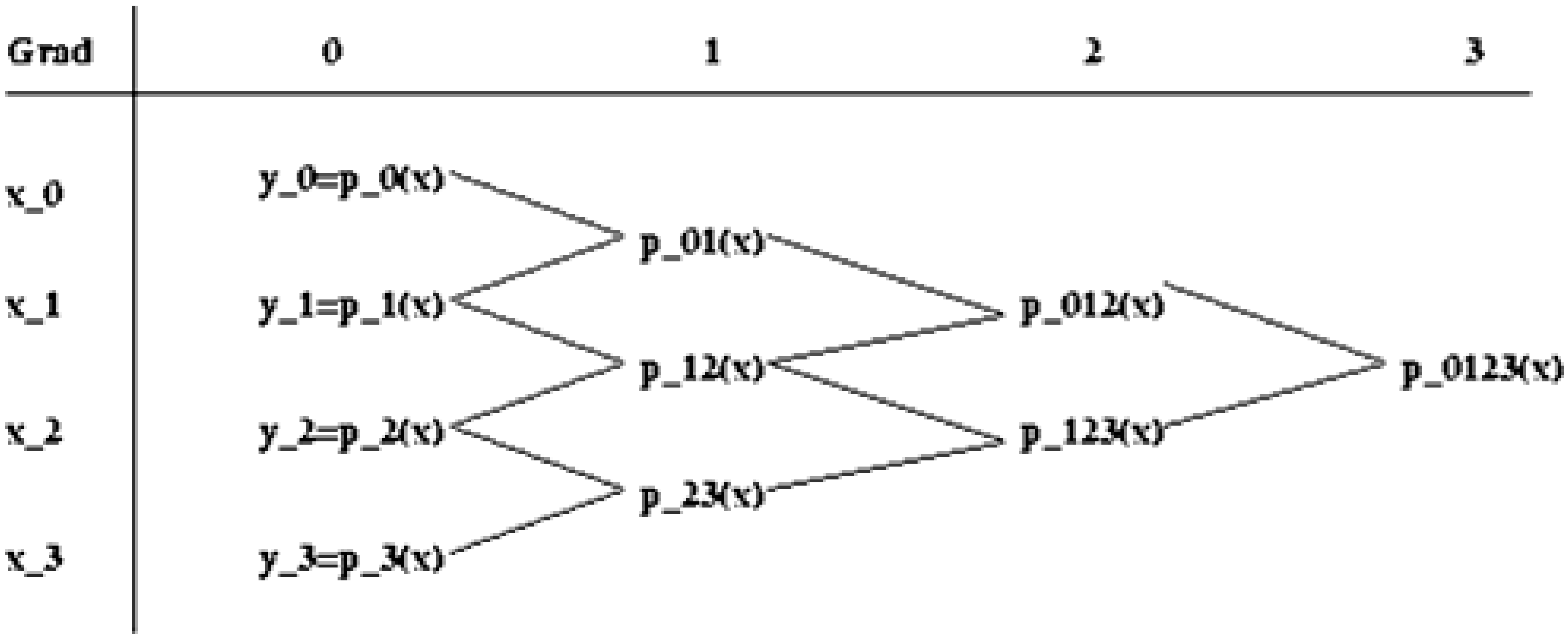
Daher ist $p_{i,\cdots,i+l}(x)$ die gesuchte Lösung!

Anwendung der Formel (*) zur punktweisen Auswertung des Interpolationspolynoms an einer Stelle $\bar{x}$: $p(\bar{x}) = ?$

Eingabe: Stützwerte (x_j , y_j), j=0,...,n und Stelle $\bar{x}$;
Ausgabe: $p_{i,\cdots,i+l}(\bar{x})$

Tableau-artige Berechnung der Interpolationspolynome aufsteigenden Grades, aber nur an der Stelle $\bar{x}$.

Neville-Tableau:



Erste Spalte sind konstante interpolierende Polynome, also genau die jeweils vorgegebenen Werte y_i .

Zweite Spalte sind interpolierende lineare Polynome zu jeweils zwei benachbarten Stützstellen.

Letzte Spalte enthält das interpolierende Polynom zu allen vorgegebenen Stützstellen.

Neue Stützstelle x_4 mit Wert y_4 kann in das Tableau eingefügt werden und führt zu einer neuen ‚Zeile' und einer neuen Endspalte p_01234(x).

Auswertung des Tableaus jeweils nur an einer festen Stelle x möglich.

Beispiel: $x_0 = 0, y_0 = 1$,

$x_1 = 1, y_1 = 3$, $x_2 = 3, y_2 = 2$

Auswertung des interpolierenden Polynoms an der Stelle x=2 mit Lagrange, bzw. Neville-Tableau:

Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} \quad \text{und}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}$$

$\rightarrow$

$$p_{012}(2) = 1 \cdot L_0(2) + 3 \cdot L_1(2) + 2 \cdot L_2(2) = -\frac{1}{3} + 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Neville-Tableau:

x_0=0	y_0=p_0(2)=1		
		5	
x_1=1	y_1=p_1(2)=3		10/3
		5/2	
x_2=3	y_2=p_2(2)=2		

Da nach (*)

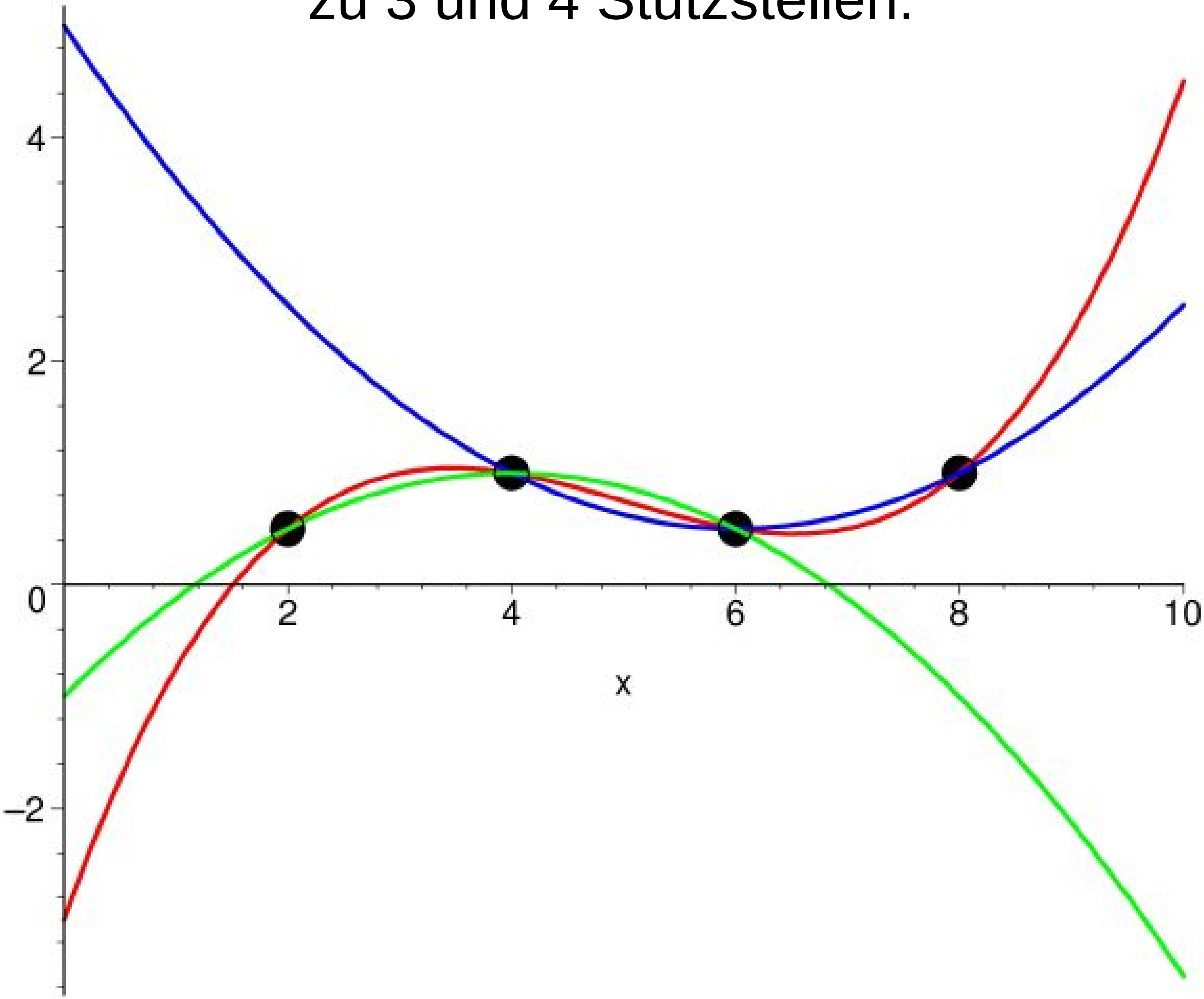
$$p_{01}(2) = \frac{(2-0)\cdot 3-(2-1)\cdot 1}{1-0} = 5$$

$$p_{01}(2) = \frac{(2-x_0)\,p_1(2)-(2-x_1)\,p_0(2)}{x_1-x_0}$$

$$p_{12}(2) = \frac{(2-1)\cdot 2-(2-3)\cdot 3}{3-1} = \frac{5}{2}$$

und daher auch $p_{012}(2) = \dfrac{(2-0)\cdot {}^{5}\!/_{2}-(2-3)\cdot 5}{3-0} = \dfrac{10}{3}$

Folge von Interpolationspolynomen zu 3 und 4 Stützstellen:



interpol.m

4.1.6. Fehler bei der Polynominterpolation

Satz: Gegeben Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ und genügend oft diff'bare Funktion f(x). p(x) sei das interpolierende Polynom vom Grad n mit $p(x_i)=f(x_i)$, i=0,...,n
An einer beliebigen Stelle gilt dann für die Abweichung zwischen p und f

$$f(\bar{x}) - p(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!} \cdot (\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n)$$

Dabei ist $f^{(n+1)}(\chi)$ die (n+1)-te Ableitung von f an einer Zwischenstelle χ aus dem Intervall

$$I := \left[\min\{x_0, x_n, \bar{x}\}, \max\{x_0, x_n, \bar{x}\}\right]$$

Frage: Wie gut wird f durch p dargestellt?

Beweis: Definiere Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - p(x) - K \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

mit p(x) = das interpolierende Polynom, und K Konstante.

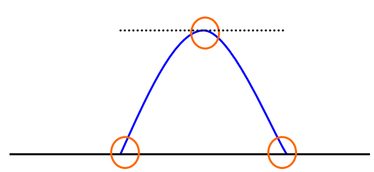
Nullstellen von g: x_0 , ..., x_n

Durch die Festlegung von K

$$K := \frac{f(\bar{x}) - p(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n)}$$ wird auch $g(\bar{x}) = 0$

Also hat die Funktion g(x) n+2 Nullstellen!

Mit Mittelwertsatz besagt der Satz von Rolle, dass zwischen zwei Nullstellen einer stetig diff'baren Funktion f stets mindestens eine Nullstelle der Ableitung f ' liegen muss (relatives Extremum mit waagrechter Tangente)



Also hat die erste Ableitung g' mindestens noch n+1 Nullstellen im Intervall I.

Die zweite Ableitung g'' noch n Nullstellen

...

die n+1-te Ableitung noch eine Nullstelle in I

$$0 = g^{(n+1)}(\chi) =$$

$$= f^{(n+1)}(\chi) - p^{(n+1)}(\chi) - K \cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big((x-x_0)\cdots(x-x_n)\big)\Big|_{\chi} =$$

$$= f^{(n+1)}(\chi) - K \cdot (n+1)!$$

Daher folgt: $K = \dfrac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}$

Denn die (n+1)-te Ableitung von $(x-x_0)\ldots(x-x_n)$ ist gleich der (n+1)-ten Ableitung von x^{n+1} allein.

Die (n+1)-te Ableitung ist auf dem Intervall I beschränkt, wenn f (n+1)-mal stetig diff'bar ist. Dann existiert M mit

$$|K| \le \frac{M}{(n+1)!} \quad \text{, z.B. mit} \quad M = \max_{x \in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right| < \infty$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$\left| f(\bar{x}) - p(\bar{x}) \right| = \left| g(\bar{x}) + K(\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_n) \right| =$$

$$= \left| \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_n) \right| \le$$

$$\le \frac{M}{(n+1)!} \left| (\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_n) \right| \qquad \square$$

Frage: Wie gut stellt p(x) die gegebene Funktion f(x) dar?

Entscheidend dafür sind

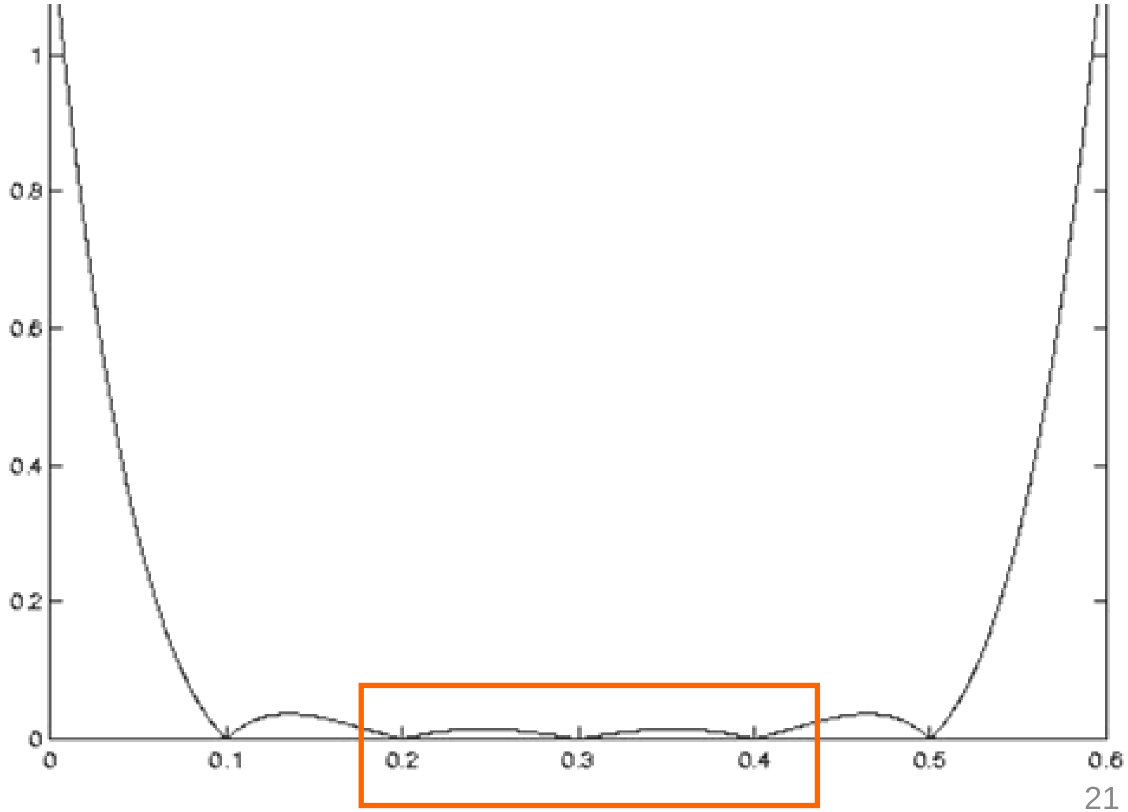
- die Größe der n+1-ten Ableitung von f auf dem Intervall I
- die Größe der Funktion $w(x) := (x - x_0)\cdots(x - x_n)$ an der Stelle $\overline{x}$

abhängig von Wahl der Stützstellen x_i

Verlauf der Funktion

w(x)=|x-0.1|*|x-0.2|*

|x-0.3||x-0.4|*

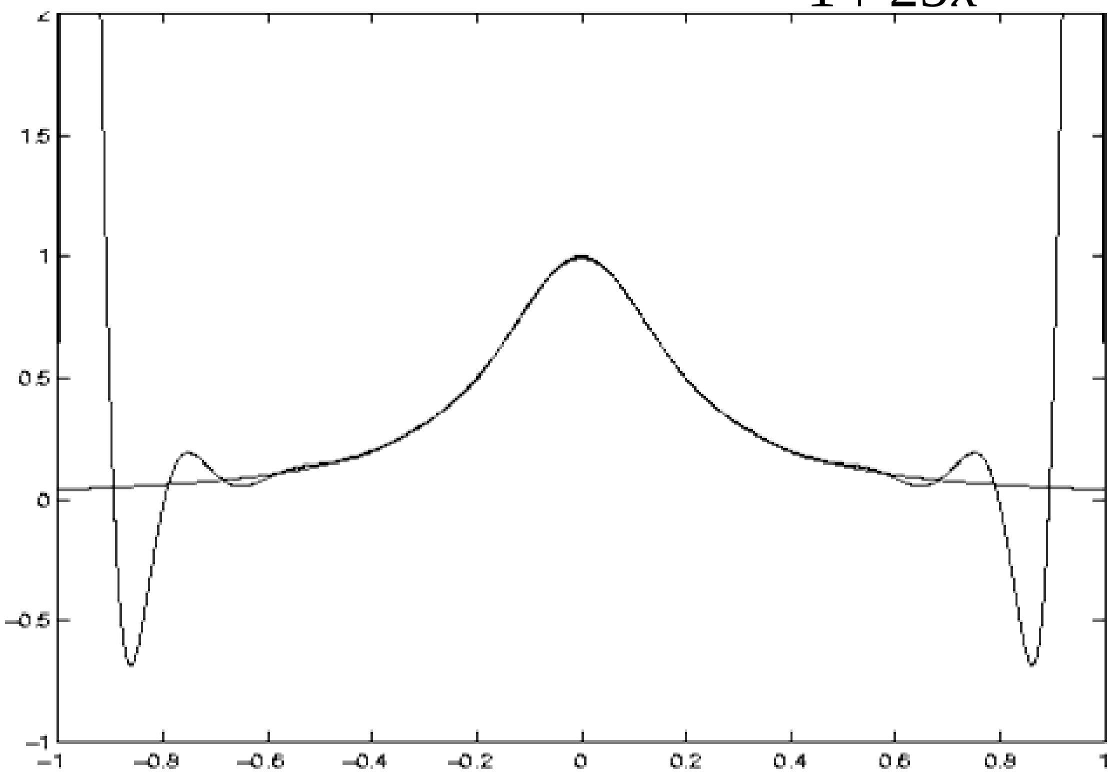


Folgerung: Näherung am Rand schlechter!

Der Abstand zwischen Funktion und interpolierendem Polynom ist klein in der Mitte der Stützstelle.

Am Rand und außerhalb kann der Fehler schnell groß werden.

Beispiel: Runge-Funktion $R(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1,1]$



R(x) und p(x) vom Grad 20, äquidistante Stützstellen.

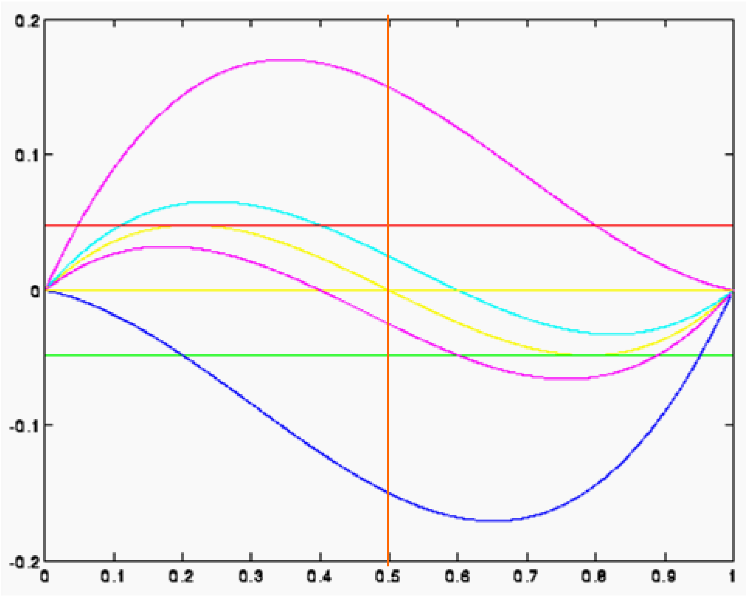
Bessere Wahl der Stützstellen, um den Fehler gleichmäßig auf dem ganzen Intervall klein zu halten:

Wähle die Stützstellen so, dass $w(x)=x^{n+1}+\ldots = (x-x_0)\ldots$ als Polynom vom Grad (n+1) auf dem Intervall I möglichst **gleichmäßig klein** wird.

Spezialfall n=2, $x_0=0$ und $x_2=1$;
Bestimme x_1 so, dass w(x) möglichst klein:

$$\min_{x_1} : \max_x |w(x)| = \max_x |(x-0)(x-x_1)(x-1)| =$$
$$= \max_x |x(x-1)(x-x_1)| \qquad in \quad [0,1]$$

Lösung: $x_1=0.5$, gelbe Kurve



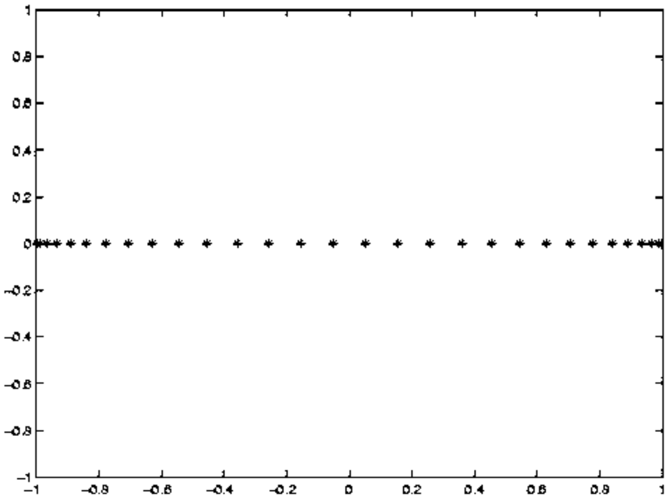
w(x) für verschiedene x_1 .
Optimal, wenn alle Werte
in schmalem Band liegen.

Beispiel: stuetz.m

Allgemeine Lösung im Intervall [-1,1]: Tchebycheff-Polynom

Nullstellen:

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right), \quad j = 0,1,\ldots,n$$



Also verteile Stützstellen besser so, dass am Rand mehr Punkte sind, um den ev. großen Fehler dort auszugleichen.

Allgemein gilt:

Polynominterpolation mit Polynomen <u>hohen</u> Grades neigt zu Oszillationen (siehe Runge-Funktion) und wird kaum verwendet.

An Stelle von äquidistanten Stützstellen

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b-a), \quad j = 0,1,\ldots,n$$

verwende man besser eine Verteilung, bei der am Rande mehr Stützstellen sind, z.B. Tchebycheff-knoten (s.o.).
Ev. Adaptive Stützstellenwahl je nach Verhalten von f.

4.1.7 Newtonform des Interpolationspolynoms

Manchmal ist man auch an einer expliziten Darstellung des Interpolationspolynoms selbst interessiert.
Allerdings eignet sich dazu nicht die übliche Form

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Effiziente Auswertung dieser Form mittels Hornerschema:

$$(\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0$$

durch das Programm:

```
y=a(n);
FOR j=n-1,…,0:
        y=y*x+a(j);
ENDFOR
```

An Stelle der Standardform verwendet man p(x) in einer Darstellung, in der die Stützstellen eingehen:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) +$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

Die Koeffizienten $f[x_0,...,x_j]$ erhält man wieder aus der wesentlichen Formel (*) aus 4.1.5:

$$\boxed{\begin{aligned} p_{i,\cdots,i+k}(x) &= \frac{(x - x_i)\,p_{i+1,\cdots,i+k}(x) - (x - x_{i+k})\,p_{i,\cdots,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} = \\ & f[x_i] + f[x_i x_{i+1}](x - x_i) + \ldots + f[x_i, \ldots, x_{i+k}](x - x_i)\cdots(x - x_{i+k-1}) \end{aligned}}$$

Sie lassen sich wieder aus einem Tableau (Tableau der ‚Dividierten Differenzen') der Reihe nach berechnen mittels

$$\boxed{f[x_i,\ldots,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}] - f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}}$$

Dann kann durch Horner-artiges Schema p(x) an der Stelle x ausgewertet werden.