

## 7.1.8. AWP für Diff'gleichungen höherer Ordnung in IR:

Gegeben eine Bedingung für die  $j$ -te Ableitung der skalaren Funktion  $y(x)$

$$\frac{d^j}{dx^j} y(x) = y^{(j)}(x) = \Psi(y^{(j-1)}, \dots, y, x)$$

mit Anfangswerten

$$\begin{pmatrix} y^{(j-1)}(x_0) \\ \vdots \\ y(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^{(j-1)} \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Umformulieren in Diff'gleichung erster Ordnung im  $\mathbb{R}^j$  :

Definiere dazu Vektorfunktion  $u(x) = ( u_1(x), \dots , u_j(x) )^T$   
und setze

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= y(x) , \\ u_2(x) &:= y'(x) , \\ &\dots \\ u_j(x) &:= y^{(j-1)}(x) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für  $u(x)$

$$u'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_{j-1}'(x) \\ u_j'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ \vdots \\ u_j(x) \\ \Psi(u_j, \dots, u_1, x) \end{pmatrix} = \varphi(u, x)$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x_0) = \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ \vdots \\ u_j(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y^{(j-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(j-1)} \end{pmatrix}$$

Insgesamt kann man nun wieder das Vektor-Eulerverfahren anwenden:

$$u^{k+1} = u^k + h \cdot \varphi(u^k, x_k)$$

## 7.1.9. Fehleranalyse:

Start bei  $a = x_0$  ,

Gesuchter Wert  $b = x_n$  ,

Bei äquidistanter Einteilung ist Schrittweite  $h := (b-a)/n$

Damit  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j=0,1,\dots,n$

Definition lokaler Diskretisierungsfehler:

An der Stelle  $x_k$  ist der lokale Diskret.-Fehler gegeben durch

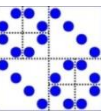
$$\left| y_{k+1} - y(x_{k+1}) \right| = |e_k|$$

Also der Fehler, der in einem Schritt von  $(y(x_k), x_k)$  nach  $(y_{k+1}, x_{k+1})$  entsteht.

$y(x_k)$  ist dabei der exakte Wert einer Lösung, nicht  $y_k$ !



Wie gut erfüllt die Lösung  $y(x)$  die Näherungsgleichung?





Definition globaler Diskretisierungsfehler:

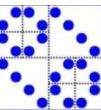
Für das AWP zur Bestimmung der Lösung an der Stelle  $b$  ist der globale Diskret.-Fehler gegeben durch

$$|y_n - y(b)| = |y_n - y(x_n)| = |g_n|$$

Definition der Konvergenz:

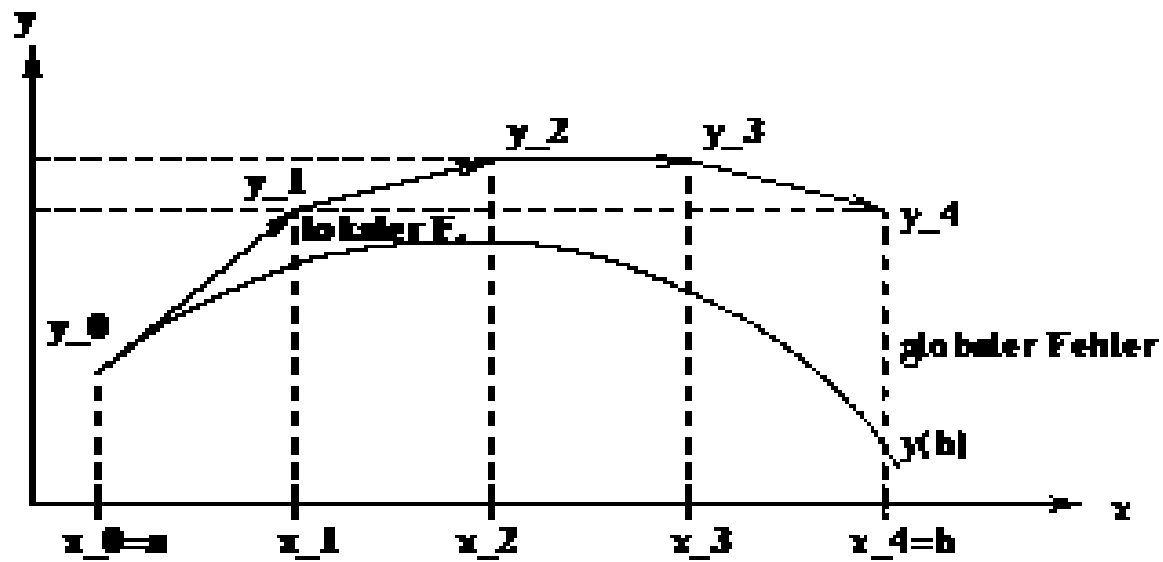
Die durch unser Lösungsverfahren erzeugte Folge heißt konvergent, wenn gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} y_n = y(b)$$

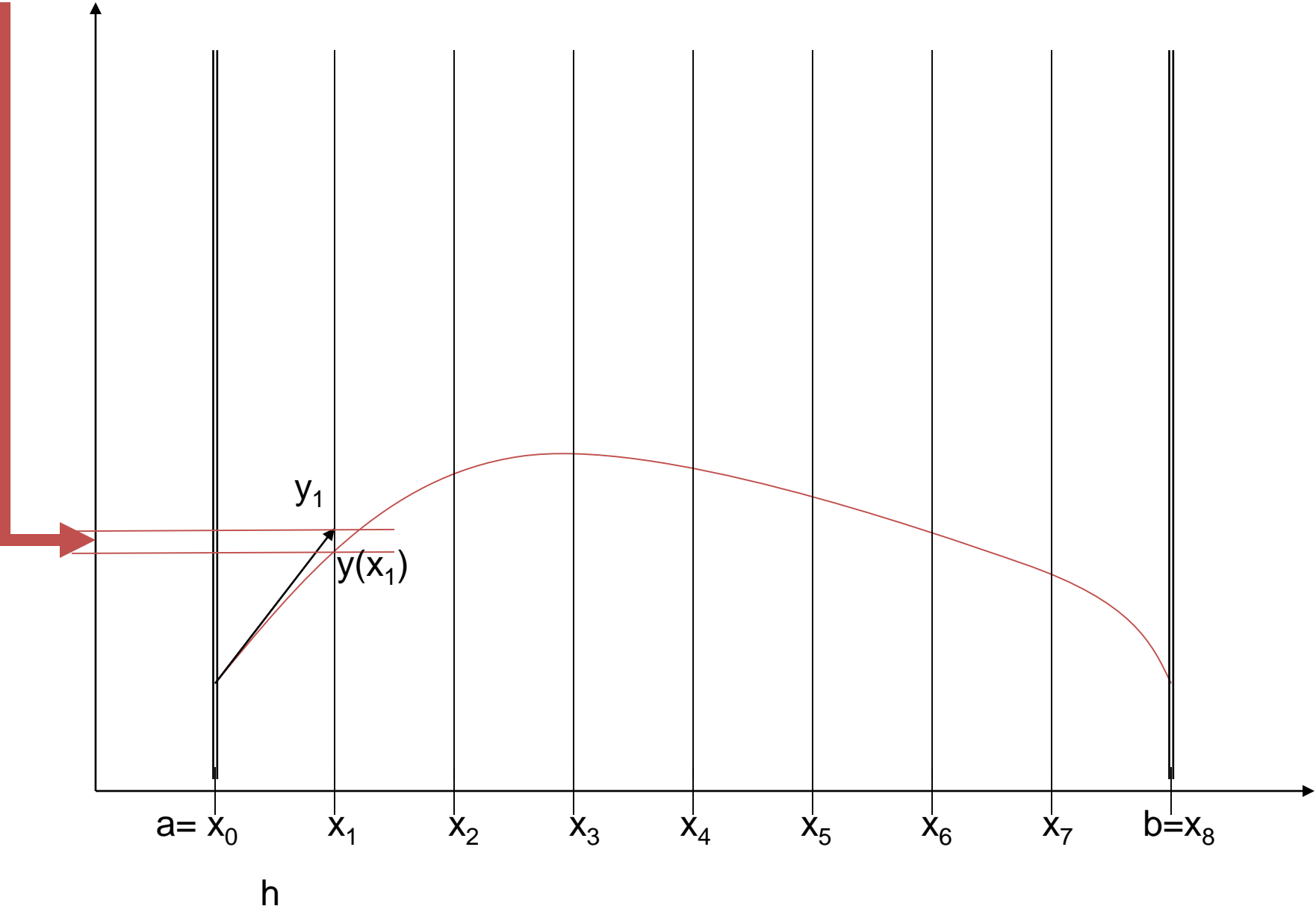


Wenn also in exakter Arithmetik bei immer feineren Unterteilungen der Näherungswert gegen den exakten Wert konvergiert.

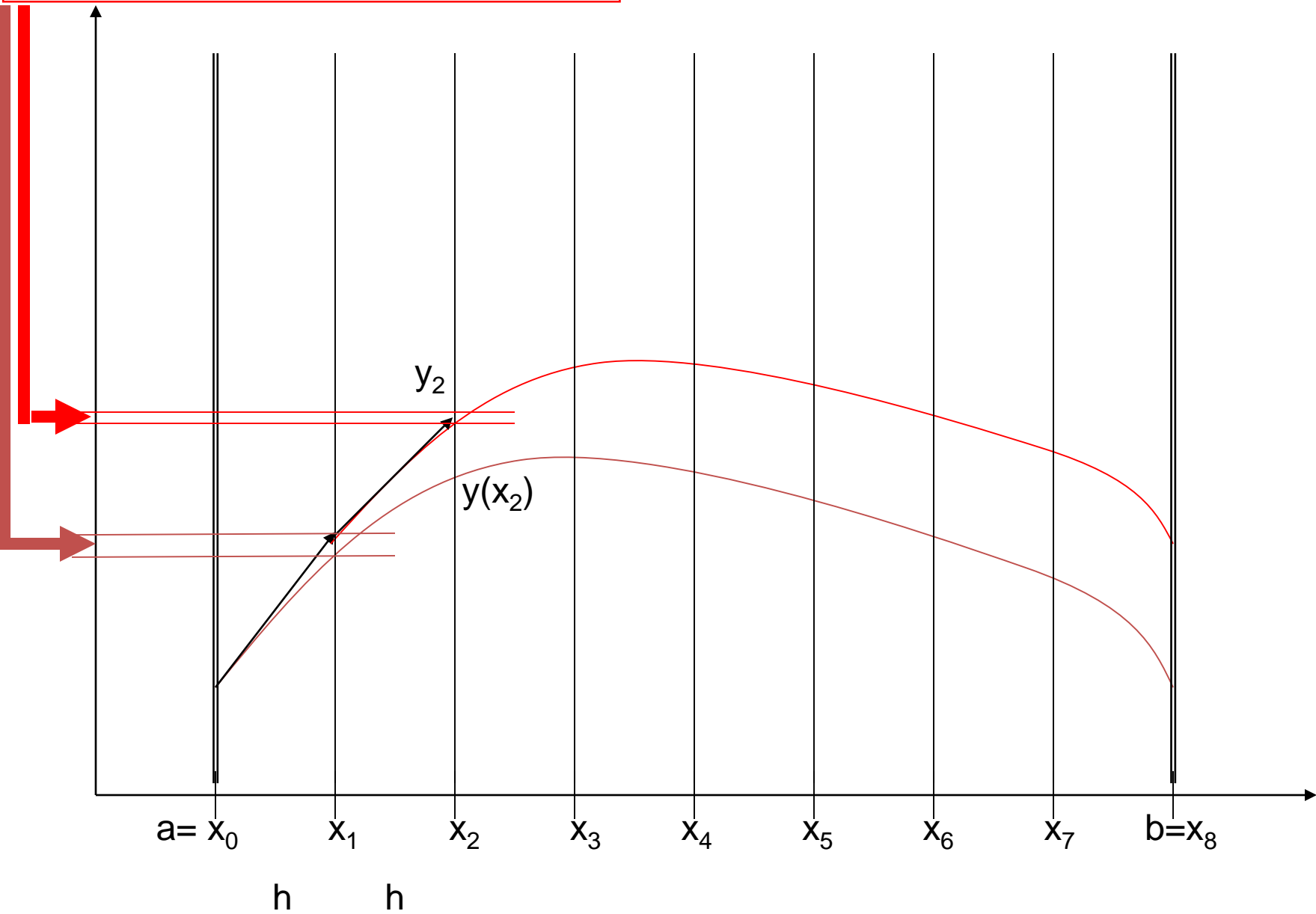
Das bedeutet natürlich auch, dass der globale Fehler gegen 0 gehen muss!



# Lokaler Diskretisierungsfehler

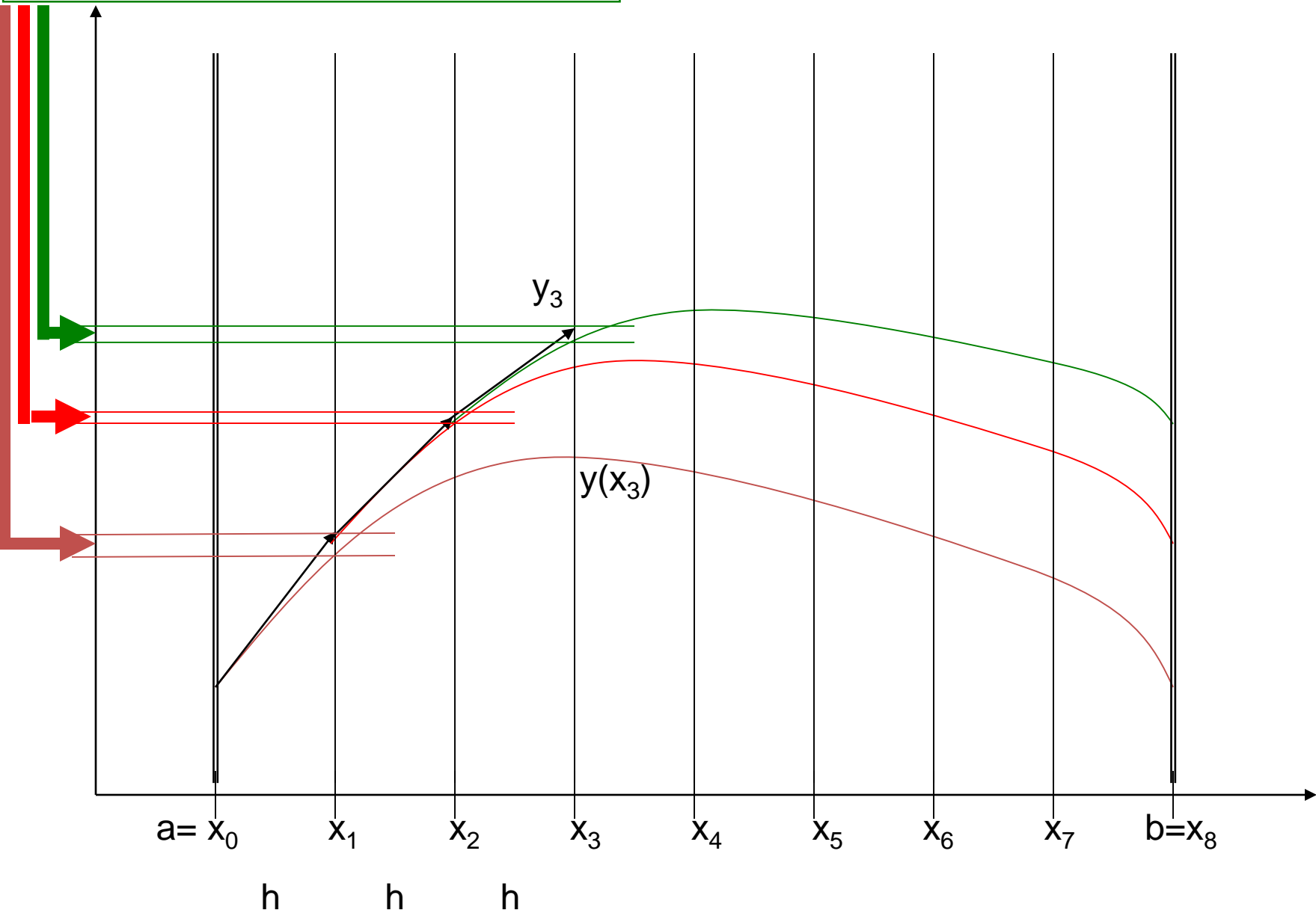


# Lokaler Diskretisierungsfehler

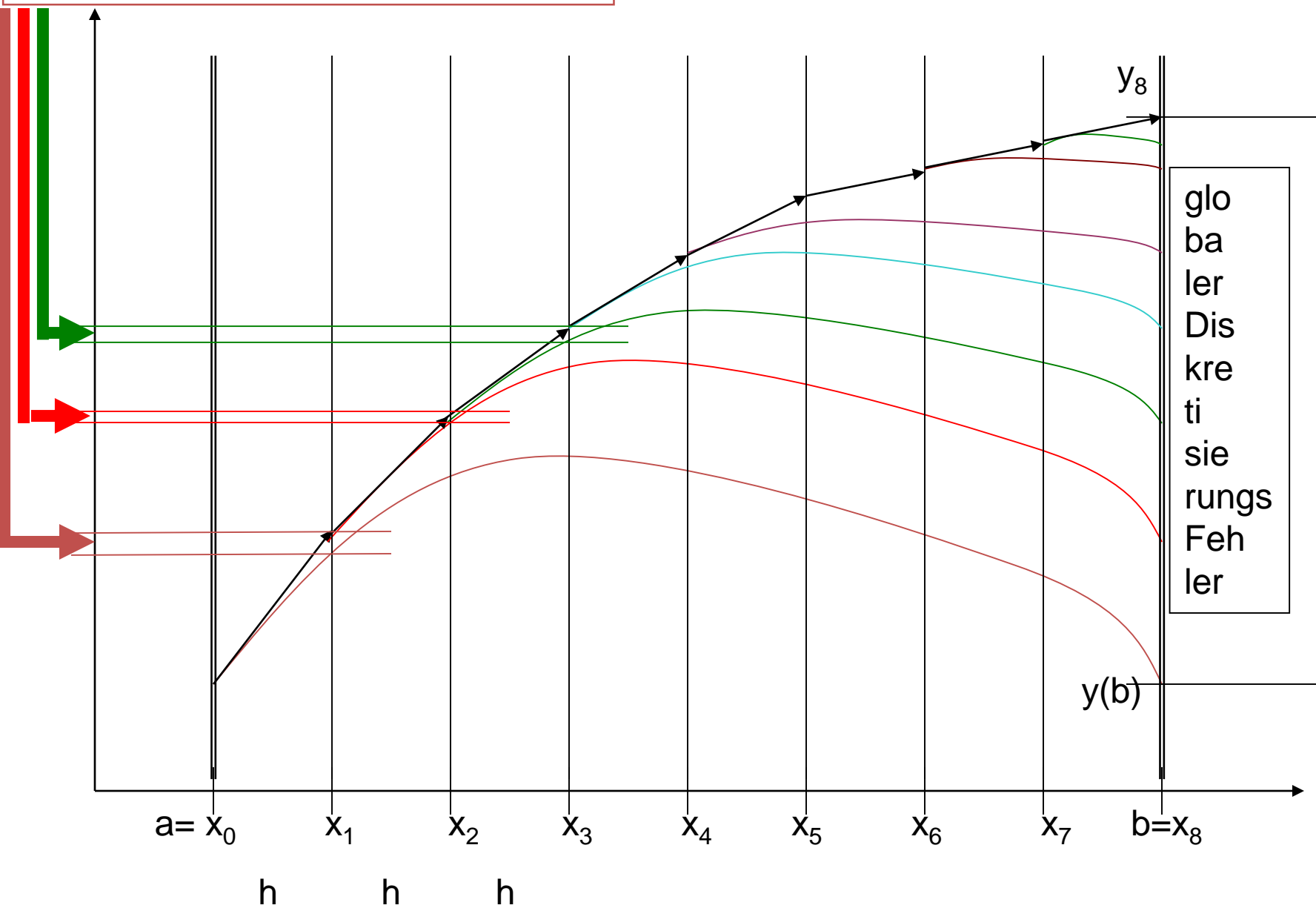




# Lokaler Diskretisierungsfehler



# Lokaler Diskretisierungsfehler



An jeder Stelle  $x_k$  treten neue lokale Fehler auf und addieren sich zum globalen Fehler.

Um insgesamt Konvergenz zu erhalten, muss also das Verfahren so sein, dass

- lokal ein genügend kleiner Fehler entsteht (Konsistenz) und
- sich diese lokalen Fehler nur zu einem kleinen globalen Fehler aufsummieren (Stabilität)(Konsistenz allein reicht nicht).

Definition Konsistenz:

Ein Verfahren heißt konsistent, wenn der lokale Diskretisierungsfehler überall mindestens von der Ordnung  $h^2$  ist, also

$$|y_1 - y(x_1)| = O(h^2)$$

Nur so ist für den globalen Fehler  $O(h^2)n = O(h)$  erreichbar!  
Denn es werden  $n$  Schritte benötigt von  $a=x_0$  bis  $b=x_n$ .

Ist  $|y_1 - y(x_1)| = O(h^{p+1})$  mit  $p \geq 1$ ,

so heißt das Verfahren von der Ordnung  $p$ .

Offensichtlich ist das Eulerverfahren konsistent von Ordnung 1, da gilt

$$|y(x_1) - y_1| = |y(x_1) - y_0 - h\varphi(y_0, x_0)| = \frac{1}{2}h^2|y''(z)|$$

mit einer Zwischenstelle  $z$ .

Konsistenz sagt:

Gute Übereinstimmung der Näherungslösung für kleines h und in exakter Arithmetik.

Frage: Wie klein muss h sein, damit auch unter Berücksichtigung von Rundungsfehler die Näherung gut mit der exakten Lösung übereinstimmt.

Dazu definiert man den Begriff Stabilität.

Wir beschränken uns als Modellfall auf den ‚linearen‘

Spezialfall:

$$y' = \varphi(y,x) = \lambda y \quad \text{mit Lösung} \quad y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$$

Problem: Divergenz bei zu großer Schrittweite  $h$ !

Wie groß kann man  $h$  wählen? Wie klein muss  $h$  sein?

Für die berechneten Näherungslösungen gilt beim Eulerver.  
auf  $y'(x) = \varphi(y, x) = \lambda y$  und  $y(x_0) = y_0$

mit Lösung  $y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$  :

$$y_1 = y_0 + h\varphi(y_0, x_0) = (1 + h\lambda)y_0,$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_1 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0,$$

$$y_k = (1 + h\lambda)y_{k-1} = (1 + h\lambda)^k y_0.$$

Für  $|1+h\lambda| > 1$  wird daher die Näherungslösung  $y_k$  immer größer.

Für  $|1+h\lambda|<1$  geht die Näherungslösung  $y_k$  gegen 0.  
Stimmt dieses Verhalten mit der tatsächlichen Lösung  
überein?

Für die tatsächliche Lösung  $y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$  gilt

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

Im Fall  $\lambda > 0$  zeigen also exakte und Näherungslösung  
dasselbe Verhalten.

Kritisch ist der Fall  $\lambda < 0$  :

Die exakte Lösung geht gegen 0,  
die Näherungslösung aber nur dann, wenn  $|1+h\lambda| < 1$  gilt,  
d.h. nur wenn

$$h < 2 / |\lambda|$$

Dies ist die Stabilitätsbedingung, die garantiert, dass eine beschränkte exakte Lösung auch durch eine beschränkte Näherungslösung approximiert wird, und der globale Fehler nicht zu stark anwachsen kann.

Also ist für  $\lambda < 0$  das Eulerverfahren nur konvergent, wenn die Schrittweite  $h$  so klein gewählt ist, dass  $h < 2 / |\lambda|$  gilt !

Führen wir dieselbe Untersuchung für das implizite (Rückwärts) – Euler –Verfahren durch, so erhält man die Näherungslösungen von der Form

$$y_k = \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k}$$



# Rückwärts-Euler:

$$y_1 = y_0 + h\lambda y_1 \Rightarrow (1-h\lambda)y_1 = y_0 \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1-h\lambda}$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1}{1-h\lambda} = \frac{y_0}{(1-h\lambda)^2}$$

$$y_k = \frac{y_0}{(1-h\lambda)^k}$$

Im kritischen Fall  $\lambda < 0$  gilt hier unabhängig von  $h$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k} = 0$$

Das implizite Eulerverfahren erfüllt für alle  $h$  die Stabilitätsbedingung, nämlich dass exakte und Näherungslösung für  $\lambda < 0$  beschränkt bleiben!

Für  $\lambda > 0$  muss auch wieder gelten  $h < 2/\lambda$ , damit  $y_k$  das richtige Verhalten im Unendlichen hat.

Ist aber nicht so kritisch, da e-Funktion mit großem  $\lambda$  praktisch selten vorkommt..

Beispiel 2-dim linear:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(x) \\ \lambda_2 y_2(x) \end{pmatrix}$$

Dies entspricht zwei unabhängigen Diff'gleichungen, die hier zusammen in vektorieller Form z.B. mittels Euler gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} y_1^{k+1} \\ y_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^k \\ \lambda_2 y_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + h\lambda_1) y_1^k \\ (1 + h\lambda_2) y_2^k \end{pmatrix}$$

Die Stabilitätsbedingung hängt hier also von beiden  $\lambda$ 's ab:

$$h < 2 / |\lambda_i| \quad \text{für } i=1,2$$

oder

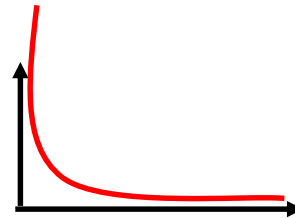
$$h < \min \{ 2 / |\lambda_1| , 2 / |\lambda_2| \}$$

Gilt nun  $\lambda_2 \ll \lambda_1 < 0$ , so wird die erlaubte Schrittweite  $h$  bestimmt von  $\lambda_2$ , also

$$h < 2 / |\lambda_2| .$$

Andererseits ist die dazugehörige Komponente in der Lösung

$$\textit{const} \cdot \exp(\lambda_2 x)$$



schon nach wenigen Schritten verschwindend klein und spielt dann für die eigentliche Lösung keine Rolle mehr!

$\lambda_2$  bestimmt dann also die Lösung nur in einem kleinen Bereich, die Schrittweite  $h$  beim Eulerverfahren aber überall!

Man spricht hier von ‚steifen‘ Diff.-gleichungen.

Offensichtlich ist in solchen Fällen das implizite Eulerverfahren wesentlich besser geeignet, da es keine Einschränkung der Schrittweite  $h$  durch die  $|\lambda_i|$  beinhaltet.

## 7.2. Anwendungsbeispiele:

### 7.2.1. Räuber-Beute-Modell

Einfaches Modell, das die Populationsänderung in einem ‚Primitiv-Ökosystem‘, bestehend aus genau einer Räuberspezies und einer Beutespezies, beschreibt.

Viele Räuber → Beute nimmt ab

Wenig Räuber → Beute nimmt zu

Viel Beute → Räuber nehmen zu

Wenig Beute → Räuber nehmen ab

Änderung der Anzahl Beutetiere  $x(t)$  ist zum einen durch die Geburtenrate  $a$  proportional der Anzahl Beutetiere, und zum anderen führt eine Begegnung eines Beutetiers mit einem Räuber ( $y(t)$ ) zu einer Verringerung (mit Sterberate  $b$ ):

$$\dot{x}(t) = ax - byx$$

Andererseits erhöht sich die Räuber-Zahl durch viele Begegnungen mit Beutetieren, während die Abnahme der Räuber von ihrer Sterberate  $d$  abhängt:

$$\dot{y}(t) = cxy - dy$$

Man erhält also zur Beschreibung der zeitlichen Änderung der Population von Räuber und Beute ein DGL-System:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

für  $t_0 \leq t \leq t_n$

$$\dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t)$$

mit Startwerten  $x(t_0) = x_0$  und  $y(t_0) = y_0$

Eulerverfahren mit Schrittweite  $\tau$  liefert dafür die Formel:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau} = ax_i - bx_i y_i$$

oder

$$x_{i+1} = x_i + \tau(ax_i - bx_i y_i)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = cx_i y_i - dy_i$$

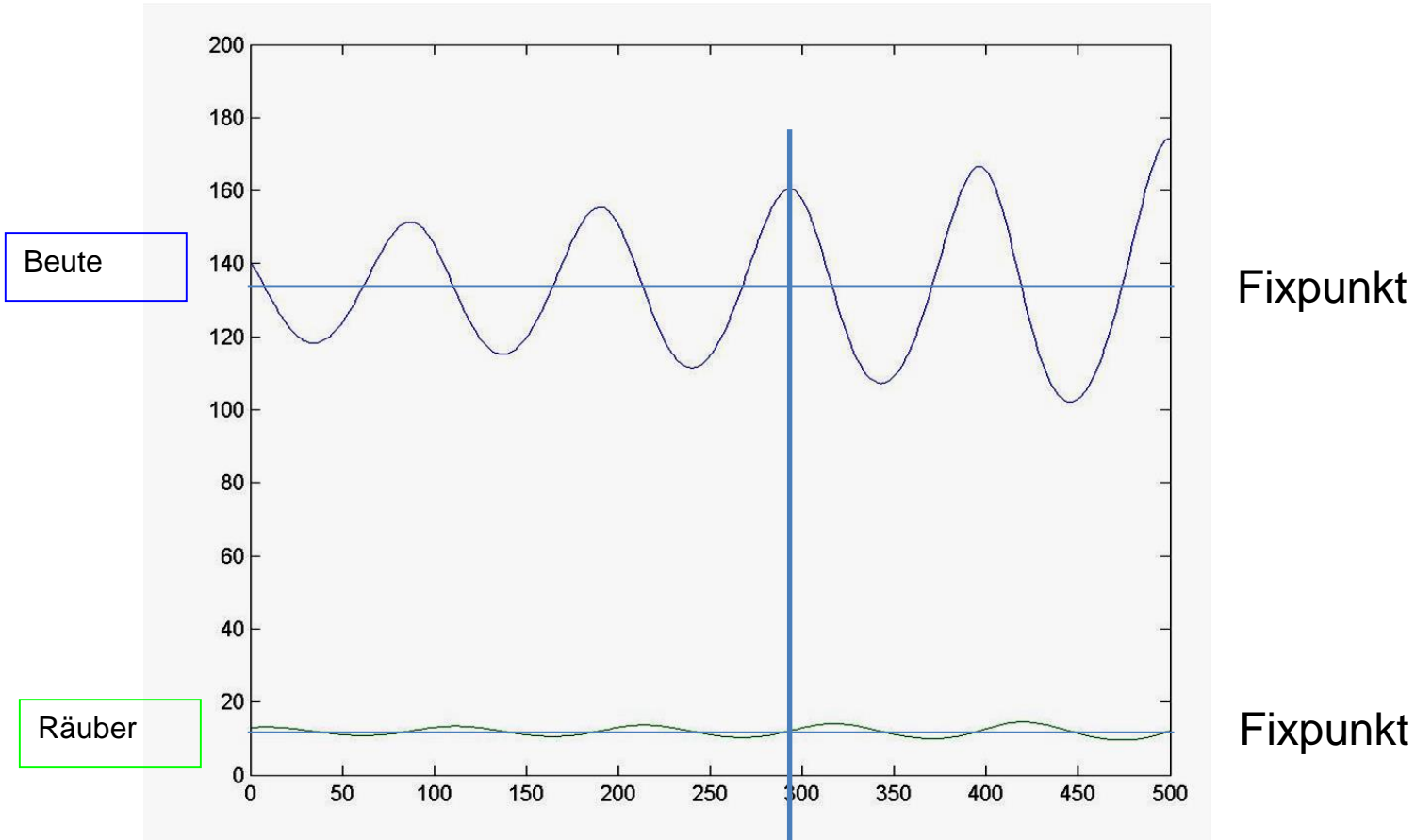
$$y_{i+1} = y_i + \tau(cx_i y_i - dy_i)$$

Fixpunkte dieser Vektoriteration:  $(x,y) = (d/c, a/b)$



# Populationsverlauf:

Parameter:  $a=.3$ ,  $b=.025$ ,  $c=.0015$ ,  $d=.2$



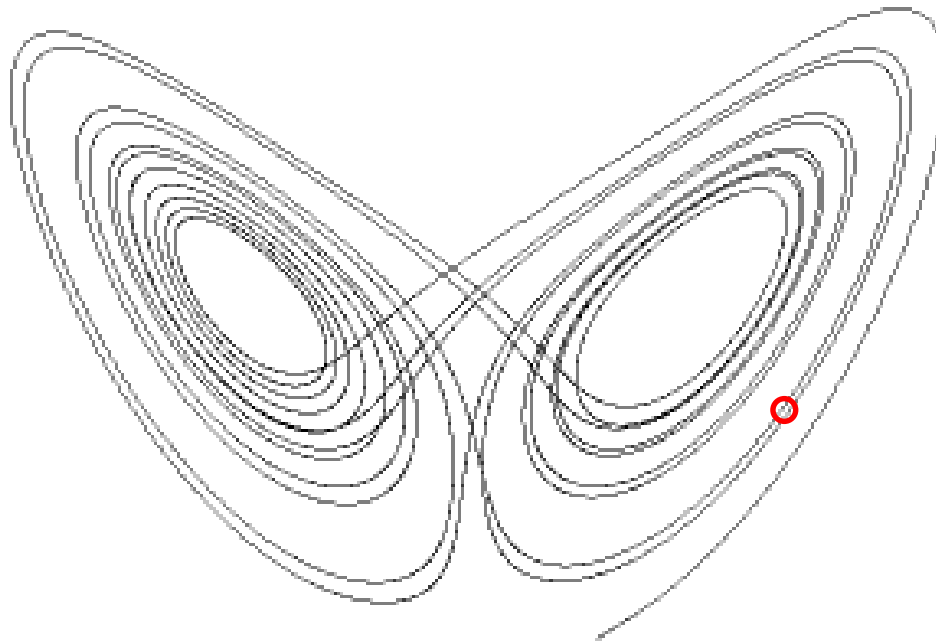
<http://www.leinweb.com/snackbar/wator/>

## 7.2.2. Lorenzattraktor:

Diff'gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1' &= a(x_2 - x_1) \\x_2' &= bx_1 - x_2 - x_1x_3 \\x_3' &= x_1x_2 - cx_3\end{aligned}$$

aus Modell für Beschreibung der Luftzirkulation in der Erdatmosphäre.



Wie bei der logistischen Parabel existieren zwei Attraktoren, zwischen denen die Lösungskurve chaotisch wechselt.

Daher führt eine minimale Änderung, z.B. der Anfangsdaten dazu, dass nach kurzer Zeit die Lösung sich an einer völlig anderen Position befindet

Der ‚Flügelschlag eines Schmetterlings‘ in China genügt, um nach einiger Zeit zu einer völlig anderen Lösung zu führen, z.B. einen Sturm in Europa auszulösen.

Daher ist es prinzipiell unmöglich, über längeren Zeitraum exakte Vorhersagen zu gewinnen, da leichteste Änderungen in den Anfangsdaten zu gänzlich anderem Lösungsverhalten führen.

Chaotisches Verhalten!

# Gewöhnliche Differentialgleichung

- hat nur eine Unbekannte (z.B. x oder Zeit t)
- hat Anfangswerte gegeben.

Zu einer Diff'gleichung in einer Variablen x kann man auch ein Randwertproblem betrachten, z.B.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varphi(u, u', x) \quad \text{auf } [a, b], \quad u(a) = u_a, \quad u_b = u_b$$

Hat eine Differentialgleichungen Ableitungen in mehr als einer Variablen, so spricht man von einer Partiellen Differentialgleichung PDE

Beispiel Diffusion (mit Anwendung in der Bildverarbeitung):

Die Strömung  $j$  – hervorgerufen durch Dichteunterschiede – erfolgt in Richtung des negativen Gradienten der Konzentration  $u \rightarrow$   $j(x, t) = -D \cdot \nabla u(x, t)$

Strömung: Wieviel Teilchen fließen pro Zeit durch Fläche.

Massenerhaltung: Zeitliche Änderung der Konzentration in einem Volumenelement kann nur durch örtliche Änderung der Strömung erfolgen (Fluss durch Fläche)  $\rightarrow$

$$\text{In 1D} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\text{div}(j) = -\frac{\partial j_1}{\partial x_1} - \frac{\partial j_2}{\partial x_2} - \frac{\partial j_3}{\partial x_3}$$

# Notation:

Nabla-Operator  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$   $\partial$  für partielle,  $d$  für totale Ableitung.

Gradient  $f(x, y, z): \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}: \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} =$   
 $= f_x + g_y + h_z = \text{div}(F)$

Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad}(U)) = \nabla(\nabla U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} U + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$



$$j(x,t) = -D \cdot \nabla u(x,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -\text{div}(j)$$



Zusammen:

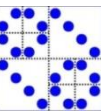
$$u_t = \text{div}(D \cdot \nabla u)$$

Im isotropen Fall ist D eine konstante Zahl, z.B. D=1:

$$u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

im zweidimensionalen Fall;

$\Delta$  heißt Laplace-Operator. 1D, 2D, 3D,...





## Einteilung Partieller Diff'gleichungen: $u(x,y,t)$

Gleichgewichtsgl. (elliptische PDE):

$$-\Delta u = f \quad \text{Zweite Ableitungen nur positiv.}$$

Wärmeleitungsgl. (parabolische PDE):

$$\Delta u = u_t \quad \text{Eine Variable nur erste Abl.}$$

Wellengleichung (hyperbolische PDE):

$$\Delta u = u_{tt} \quad \text{Eine Variable negative zweite Abl.}$$

# Wichtige Partielle Differentialgleichungen:

Wärmeleitung:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$   $u(x,t)$ : Temperatur

Navier-Stokes:  $\partial_t u = \nu \Delta u - \nabla p + f$ ,  $\nabla \cdot u = 0$ . Strömung,  
Geschwindigkeit  $u$ , Druck  $p$

Schrödinger:  $i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + Vu$  Quantenmechanik, Aufenthaltswahr.

Wellengleichung:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$  beschreibt Ausbreitung einer Welle

Helmholtz:  $\Delta v + \omega^2 v = 0$  spezielle Lösungen der Form  $u = v(x)e^{i\omega t}$

Maxwell:  $\partial_t E = \nabla \times B - J$ ,  $\partial_t B = \nabla \times E$ ,  $\nabla \cdot E = \rho$ ,  $\nabla \cdot B = 0$ .

Black-Scholes:  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$ . Aktienpreis  $S$ , Option  $\sim V$

