Beispiel: Berechnung von

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \approx 0$$

Problematisch?

Kondition ist OK, da

$$cond_x = \left| \frac{x^2}{(1 - \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}} \right| \to \quad 2 \qquad \mathit{für} \qquad x \to 0$$ (L'Hospital)

Allerdings ist die Auswertung in dieser Form numerisch instabil

$$x \to x^2 \to 1 - x^2 \to \sqrt{1 - x^2} \to 1 - \sqrt{1 - x^2} \to 1 - 1$$

da Auslöschung im letzten Schritt!

Bessere Formulierung:

$$1-\sqrt{1-x^2} = \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{1+\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1-(1-x^2)}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

Für $x \approx 0$ keine Subtraktion mehr!
Alle Einzelschritte sind gut konditioniert!

Entsprechend lässt sich die Berechnung der Exponentialfunktion für große negative x ‚retten', indem wir exp(-1000) ersetzen durch 1/exp(1000) .

<u>Beispiel</u>: f(x) = 1 - cos(x) für **x ≈ 0:**

f(x) ist wieder gut konditioniert bei 0, da

$$cond_x = \left|\frac{xf'}{f}\right| = \left|\frac{x \cdot \sin(x)}{1-\cos(x)}\right| = \left|\frac{x^2+\cdots}{1-(1-x^2/2+\cdots)}\right| \rightarrow \quad 2, \quad x \rightarrow 0$$

Aber bei 0 ist cos(x) nahe bei 1 → wieder Auslöschung!

In MATLAB: 1 - cos(10^(-8)) ergibt 0;

und mit **cos(10^(-3)) = 0.<u>999999</u>50000004**

verliert man bei der Differenz 6 signifikante Stellen

Anderer Berechnungsweg:

1 - cos(x) = 2 sin²(x/2)

oder Reihenentwicklung des Cosinus

$$1-\cos(x)=1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots$$

Beispiel: $y = a^2 - b^2$ bei $|a|=|b|$

Anwendung der Epsilontik; seien a,b Maschinenzahlen:

Berechne erst beide Produkte, dann die Differenz.

$$\left(a \cdot a\left(1+\varepsilon_{p1}\right) - b \cdot b\left(1+\varepsilon_{p2}\right)\right)\left(1+\varepsilon_{a3}\right)$$

Relativer Fehler:

Nun seien auch a und b fehlerhaft: $\mathbf{a(1+\varepsilon_a)}$, $\mathbf{b(1+\varepsilon_b)}$

$$\left(a \cdot a(1+\varepsilon_a)^2\left(1+\varepsilon_{p1}\right) - b \cdot b(1+\varepsilon_b)^2\left(1+\varepsilon_{p2}\right)\right)\left(1+\varepsilon_{a3}\right)$$

$$\varepsilon_y \doteq \boxed{-\frac{2a^2}{a^2-b^2}\varepsilon_a + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\varepsilon_b} - \boxed{\frac{a^2}{a^2-b^2}\varepsilon_{p1} + \frac{b^2}{a^2-b^2}\varepsilon_{p2}} - \varepsilon_{a3}$$

Fehler: Eingabefehler Produktfehler Differenzfehler

Konditionszahlen:

$$cond_a = \left| \frac{a \cdot \frac{dy}{da}}{a^2 - b^2} \right| = \left| \frac{2a^2}{a^2 - b^2} \right| \quad , \qquad cond_b = \left| \frac{b \cdot \frac{dy}{db}}{a^2 - b^2} \right| = \left| \frac{-2b^2}{a^2 - b^2} \right|$$

Problem ist schlecht konditioniert für $|a| \cong |b|$

Andere Art der Berechnung: **y = (a – b)(a + b)**

$$f = \big(a(1+\varepsilon_a) - b(1+\varepsilon_b)\big)(1+\varepsilon_-)\big(a(1+\varepsilon_a) + b(1+\varepsilon_b)\big)(1+\varepsilon_+)\cdot(1+\varepsilon_*)$$

$$\doteq \big(a^2(1+2\varepsilon_a) - b^2(1+2\varepsilon_b)\big)\cdot(1+\varepsilon_- + \varepsilon_+ + \varepsilon_*)$$

Relativer Fehler in erster Näherung:

$$\boxed{\frac{-2a^2}{a^2-b^2}\varepsilon_a + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\varepsilon_b} - \boxed{\varepsilon_- - \varepsilon_+} - \varepsilon_*$$

Vergleich mit erstem Algorithmus:

Das neue Verfahren ist besser, da i.W. nur der unvermeidbare Fehler (durch Eingabefehler) auftritt!

Grund: Auslöschung in $a - b$ geringer als in $a^2 - b^2$,
da Fehler in a und b kleiner als in a^2 und b^2 .

Zusammenfassung

Endlichkeit des Computers führt zu endlicher Menge von Maschinenzahlen.

In jedem Schritt treten Rundungsfehler auf.

Gefährlich sind Operationen, bei denen man signifikante Stellen verliert, wie z.B.:

- Auslöschung (Differenz fast gleicher, fehlerhafter Zahlen)

- Summe zwischen großer Zahl und sehr kleiner Zahl, bei der die signifikanten Stellen in der kleinen Zahl stecken (vgl. wiederholtes Wurzelziehen)

- Allgemein Operationsfolgen mit großen Zwischen-werten und kleinen Endwerten (vgl. exp, Teilfunktion schlecht konditioniert).

Vorsicht! *Gesundes Misstrauen*!

Algorithmus ist OK, wenn die Größenordnung der relativen Fehler im Resultat ungefähr gleich der Größenordnung der Eingabefehler bleibt.

Umformen eines numerisch instabilen Verfahrens durch

- andere Reihenfolge der Berechnung

- Anfang der Taylorentwicklung

- Trigonometrische Formeln

- algebraische Umformung (binomische F.)

- ....

- Ev. double precision rechnen, damit trotz schlechter Kondition oder Rundungsfehler noch brauchbares Resultat übrigbleibt.

Systematische Fehler und große Zahl der Operationen können zu schlechten Ergebnissen führen!

(Siehe Beispiel Börsenindex)

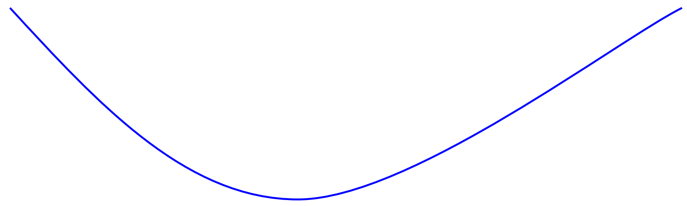
Ev. Modellfehler gegen Rundungsfehler abwägen:

Feineres Modell → Mehr Rechnung → Mehr Rundungsfehler!

Man muss die optimale Balance finden!

Beispiel Übungsaufgabe Differenzenquotient.

Gesamtfehler:



Grob diskretisiert → Modellfehler

Optimum

fein diskretisiert→ Rundungsfehler

Beispiel: Verbesserte Fehleranalyse für den numerisch instabilen Fall großer Zwischenwerte

Zerlege Problem f(x) in zwei Schritte

$$y = f(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(z)$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend right, "f_1"'] \arrow[rr, bend right=50, "f"'] & z \arrow[r, bend right, "f_2"'] & y \end{tikzcd}$$

wobei $z = f_1(x)$ großer Zwischenwert und

$y = f_2(z)$ kleiner Endwert.

Beispiel f(a,b)=a+b. a+b+…+z = f(…f(f(a,b),c),…,z)

Daher ist Teilproblem $f_2(z)$ für diese Werte schlecht konditioniert,

da $|z / f_2(z)|$ groß ist!

Daher ist Gesamtverfahren nicht numerisch stabil für x.

Verfahren ist numerisch stabil, wenn für jede Zerlegung in Teilprobleme $f_2(f_1(x)) = f_2(z)$, $z = f_1(x)$, $f_2(z)$ stets gut konditioniert ist! Keine großen Zwischenwerte!

Konditionszahl ←→ Gesamtproblem
Numerisch stabil ←→ Berechnungsform

Genauere Analyse der numerischen Stabilität durch Bestimmung der Konditionszahlen und Ableitungen aller Teilschritte:

Zerlege Algorithmus in Teilprobleme $f(x) = f_2(f_1(x))$ und berechne alle auftretenden Konditionszahlen $\mathrm{cond}(f_2)$!

Meist zu aufwändig oder unmöglich.

Epsilontik genügt für uns:

(i) (Ersetze $x \rightarrow x(1+\varepsilon)$, $x \text{ op } y \rightarrow (x \text{ op } y)(1+\varepsilon)$)

(ii) Streiche Terme höherer Ordnung in $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \ldots$

(iii) Bestimme damit den rel. Fehler des Resultats $(f - y)/f$ in erster Näherung und schätze Beträge ab nach oben

(iv) Diskutiere die einzelnen Terme.

Ziel:

Erkenne aus Formel (Programm), bzw. berechneten (Zwischen)werten,

- ob das Problem gut konditioniert ist, und

- ob das verwendete Verfahren numerisch stabil ist,

- bzw. wie das Verfahren ev. verbessert werden kann.

Klausuraufgabe: $f(x)=\exp(x)-1$, $g(x)=1-x+x^2-x^3$, $h(x)=(1+x^2)(1-\cos^2(x))$

Schlecht konditionierte Probleme:

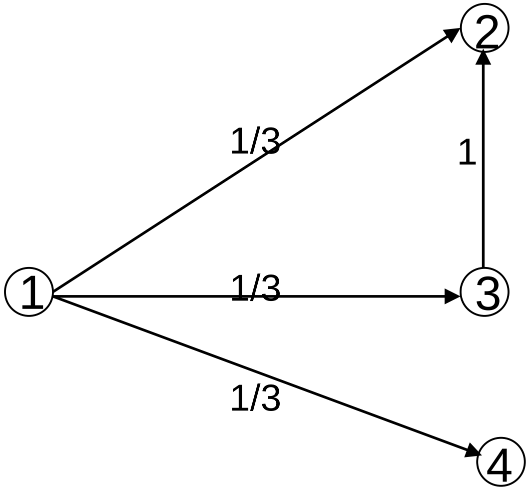
- Wettervorhersage
- Aktienentwicklung
- Chaos-Theorie in dynamischen Gleichungen
- ...

Sprunghaft, chaotisch, parameterabhängig, selbstbezüglich

Vorsicht mit Vorhersagen:
“Die einzigen Vorhersagen, die wirklich zutreffen sind die, die man nachträglich macht.”
Vorsicht bei nachträglicher Bewertung von Vorhersagen!
Psychologische Effekte.

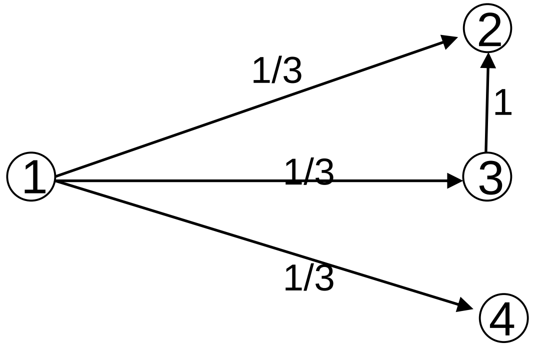
Googles PageRank

Betrachte WWW als gewichteten Graphen mit Knoten (Webseiten) und Kanten (Links):



Erstelle dazu n x n – Matrix=Tabelle (n = Anzahl der Knoten)
Eintrag $a_{i,j} = 1/q$, wenn Kante von i nach j (insgesamt q Kanten von i)
Alle anderen Einträge in i-ter Zeile dann 0

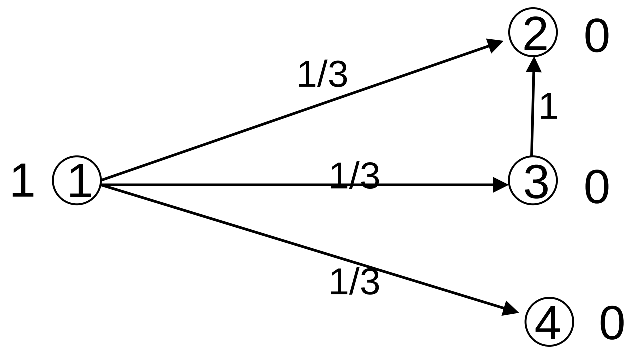
Geht von i gar keine Kante aus, dann $a_{i,j} = 1/n$ für alle j.



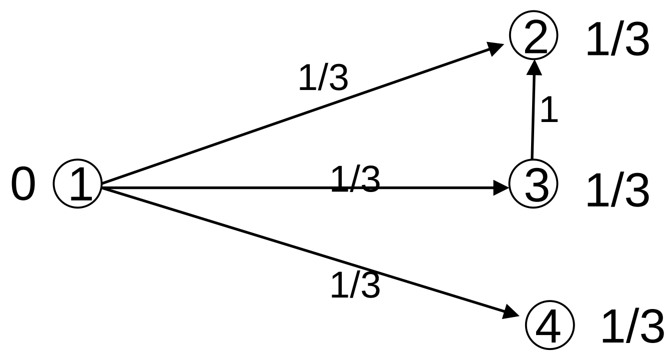
$$\begin{array}{l} 1: \\ 2: \\ 3: \\ 4: \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = A$$

Die Summe der Einträge in einer Zeile stets gleich 1 ist.

Random Walk

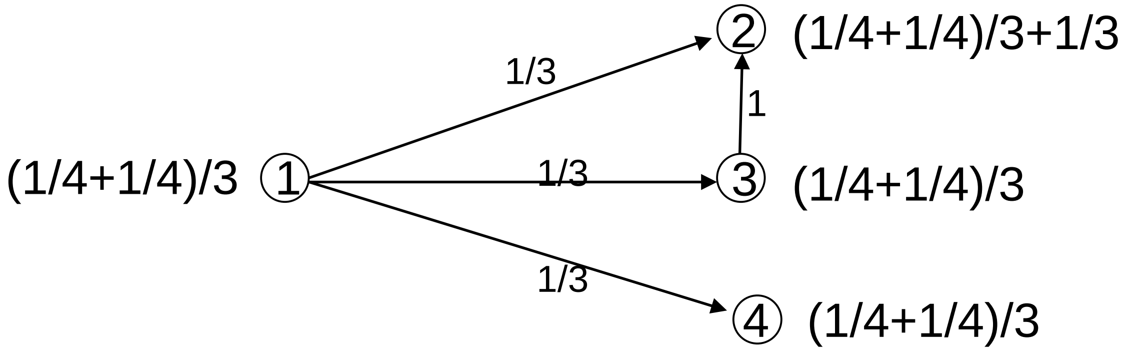


Start: $x_0 = (1,0,0,0)$

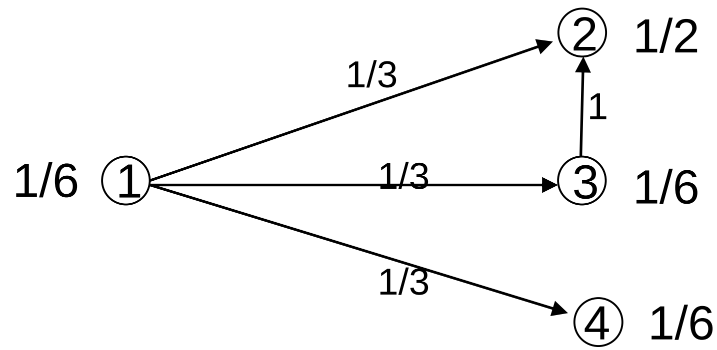


1.: $x_1 = (0,1/3,1/3,1/3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

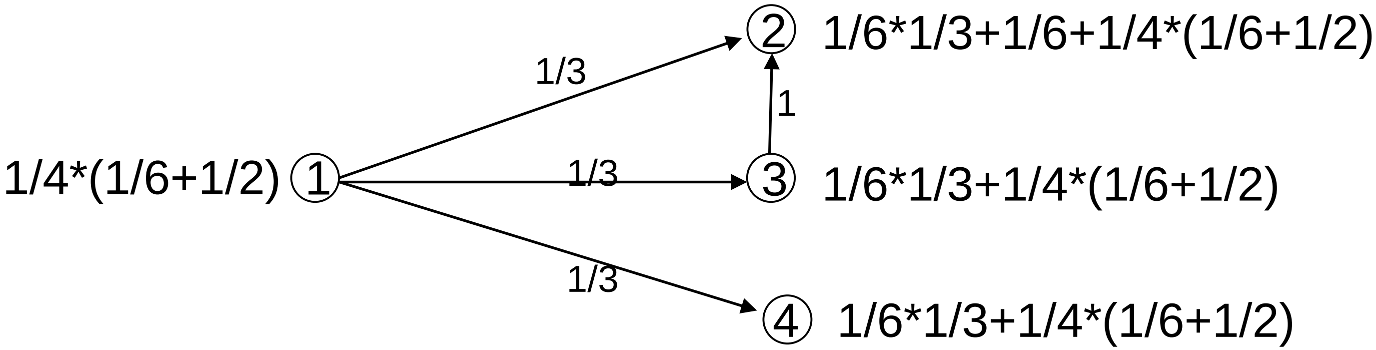


=

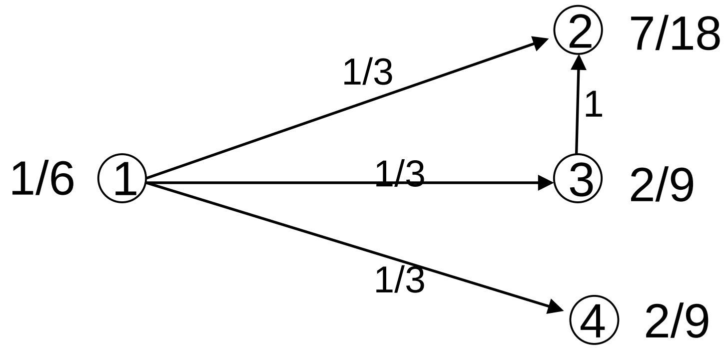


2.: $x_2 = (1/6, 1/2, 1/6, 1/6)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$



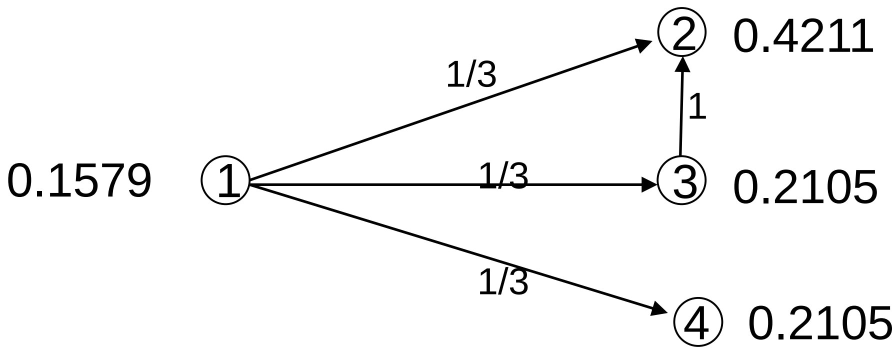
=



3.: $x_3 = (1/6, 7/18, 2/9, 2/9)$

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/18 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Im Grenzwert



x = (0.1579, 0.4211, 0.2105, 0.2105)

Formulierung als Gleichungssystem:
Suche den Vektor x der bei Linksanwendung stationär ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

Lösungsvektor x ist stationär, d.h. ein Random Walk-schritt liefert wieder x. x=xA.

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2/4 + x_4/4 &= 0\\
x_1/3 - 3x_2/4 + x_3 + x_4/4 &= 0\\
x_1/3 + x_2/4 - x_3 + x_4/4 &= 0\\
x_1/3 + x_2/4 - 3x_4/4 &= 0
\end{aligned}$$

Spezielle Eigenschaft?

In Matrix/Vektor-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & -1 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 0 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Lösungsvektor x gibt Komponente x_i die Gewichtung der i-ten Webseite an: PageRank von Seite i.

$$x = \begin{pmatrix} 0.1579 & 0.4211 & 0.2105 & 0.2105 \end{pmatrix}$$

google4.m

3.1 Dreiecksgleichungssysteme

Beispiel: **Unbekannte x_1, x_2, x_3:**

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 + 0x_3 &= 7 \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5 \\ 6.2x_3 &= 6.2 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{pmatrix}$$

Wegen der Dreiecksform lässt sich das System leicht von unten her auflösen:

$$x_3 = 6.2/6.2 = 1; \qquad also \quad x_3 = 1;$$

$$2.5x_2 = 2.5 - 5x_3 = -2.5, \qquad also \quad x_2 = -1;$$

$$10x_1 = 7 + 7x_2 = 7 - 7 = 0, \qquad also \quad x_1 = 0;$$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

Probe durch Einsetzen!

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

wird gelöst mittels **Programm 3.1.1.:**

$$x_n = b_n / a_{nn};$$

$$\text{für} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1:$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Genauso wird das untere Dreieckssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

von oben her gelöst mit dem Programm:

$$x_1 = b_1 / a_{11};$$

$$\text{für} \quad i = 2,3,\ldots,n:$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Immer lösbar?

Wichtig: Alle $a_{ii} \neq 0$, da sonst System nicht eindeutig lösbar!

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$$

3.2 Einschub: Rechnen mit Matrizen

Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \Re^{n,m}$$

beschreibt Abbildung

x → f(x) = Ax = b .

Matrizen bilden kommutative Gruppe bzgl. +, bzw.

Invertierbare nxn-Matrizen bilden sogar Gruppe bzgl. *
(aber nicht kommutativ! AB≠BA)

A^{-1} * A = I = Einheitsmatrix = Identität = 1

Matrix-Multiplikation: A * B = C

$$\begin{array}{cc} & \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \end{array} * \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \phantom{b_{11}} & j & \phantom{b_{1m}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & b_{1m} \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ b_{k1} & \cdot & b_{km} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \phantom{c_{11}} & j & \phantom{c_{1m}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \boxed{\cdot} & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} & i \end{array}$$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

Spezialfall: $$a^T \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j \in R$$

ist Skalarprodukt (Inneres Produkt) der Vektoren a und b

$$a \cdot b^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

als Äußeres Produkt von a und b.

$A = a\, b^T$ ist Rang-1-Matrix, d.h. die durch A beschriebene Abbildung f(x) hat eindimensionalen Bildraum:

$$f(x) = A\,x = (a\, b^T)\, x = (b^T x)\, a = r(x)*a$$

bildet die 2-dim. Ebene auf die Gerade durch den Vektor a ab.

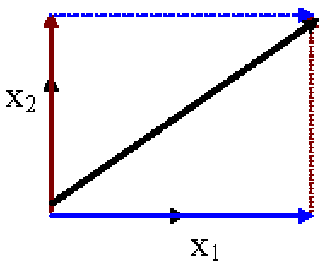
Eine invertierbare n x n–Matrix A hat vollen Rang n und det(A) ≠ 0

$$A^T = \left(\left(a_{i,j} \right)_{i,j=1}^{n,m} \right)^T = \left(a_{j,i} \right)_{j,i=1}^{m,n}$$ Spiegelung an der Hauptdiagonalen

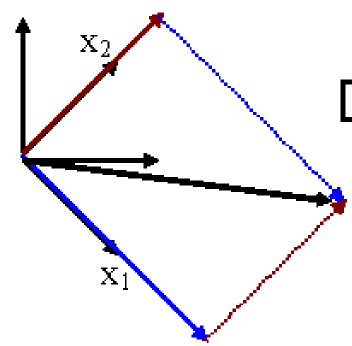
3.2.1. Beispiele:

Abbildung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Daher: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$



→



Drehung um 45°

Weitere Beispiele

Google Page-Rank Matrix: Tabelle von Webseiten-Verlinkung:

	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1	0	1	0	0
w_2	1	0	1	1
w_3	0	1	0	2
w_4	0	2	3	0

Bild filtern: $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oder eindimensional $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matrix beschreibt lineare Abbildung:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Orthonormalbasis:

Vektoren $\mathbf{u_j}$, $\mathbf{j=1,\ldots,n}$ mit $\mathbf{u_j^T u_k = 0}$ für $\mathbf{j \neq k}$

$\mathbf{u_j^T u_k = 1}$ für $\mathbf{j = k}$

Dies sind n ***linear unabhängige*** Vektoren, also eine ***Basis*** des $\mathbf{R}^n$ oder ein **Koordinatensystem.**

Norm: $\mathbf{\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}}$ ist die euklid'sche Länge.

Eigenschaften: $\mathbf{\|x\| > 0}$ **für** $\mathbf{x \neq 0}$

$\mathbf{\|a*x\| = |a|*\|x\|}$ **für** $\mathbf{a \in R}$

$\mathbf{\|x+y\| <= \|x\| + \|y\|}$

und

$\mathbf{|x^T y| <= \|x\|*\|y\|}$

Norm von x=0?

Q ist orthogonale Matrix, wenn stets

$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ oder $x^T Q^T Q x = x^T x$, d.h.

$Q^T Q = I$ oder $Q^{-1} = Q^T$

Die Spalten (Zeilen) von Q bilden eine Orthonormalbasis!

Ein lineares Gleichungssystem **Ax = b** ist lösbar, falls

Rang(A) = Rang(A | b), d.h.

b ist durch Spalten von A darstellbar.

Denn mit der Lösung x (falls sie existiert) ist b = Ax eine Linearkombination von Spalten von A:

$$b = A_{\cdot,1} x_1 + \cdots + A_{\cdot,n} x_n$$

Dann ist

$$\mathbf{x = inv(A)*b = A^{-1} * b}$$

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder eindeutige/keine/unendlich viele Lösungen! Beispiele?

Exkurs: Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Vektor u heißt Eigenvektor zu Eigenwert λ, wenn gilt:

$$u \neq 0: \qquad Au = \lambda u, \quad A \quad n \times n \quad Matrix$$

Richtung u beschreibt Fixgerade der Abbildung y=Ax

Ist A reell symmetrisch, $A=A^T$, so gilt sogar:
Es existieren n paarweise orthogonale Eigenvektoren,
also eine Orthonormal-Basis des $|R^n$,
$u_1,\ldots,u_n$, $\quad Au_j = \lambda_j u_j$, $u_i \perp u_j$ für $i \neq j$, $\| u_j \| = 1$

$$AU = A\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au_1 & \cdots & Au_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = U\Lambda$$

U liefert ideale Basis für A: $\qquad U^T A U = \Lambda$

Tacoma Narrows/London Millenium Bridge