Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Michael Rippl
Fabio Gratl

SoSe 2018

Numerisches Programmieren, Übungen

6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

Nach der Beschäftigung mit Interpolationsformeln drängt sich für die numerische Integration die folgende Idee geradezu auf. Kann man das Integral einer Funktion über ein Intervall nicht exakt bestimmen, so bestimmt man erst eine möglichst genaue Interpolationsfunktion, die man exakt integrieren kann.

a) Bestimmen Sie die Näherungsformel Q_1 für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$, die sich durch die Integration des Interpolationspolynoms von Lagrange mit den zwei Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt!

b) Welche Näherung Q_2 ergibt sich durch Hinzunahme einer dritten Stützstelle in der Mitte des Intervalls, das heißt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$?

c) Sei ein beliebiges Polynom 3. Grades $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} c_i x^i$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Näherungsformel Q_2 aus Teilaufgabe b) die Gleichung

$$Q_2(p) \quad = \quad \int\limits_0^1 p(x)\, dx$$

stets erfüllt!

d) Benutzen Sie die in Teilaufgabe a) entwickelte Formel, um die Integrale

i) $\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\, dx$,

ii) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\, dx$ und

iii) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

näherungsweise zu bestimmen!

2) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen per Hand und mit den Formeln der **T**rapezregel und **T**rapez**s**umme aus der Vorlesung integrieren. Ziele der Berechnungen sind also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_T(f)$ und $Q_{TS}(f;h)$,

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{TS}(f;h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2} \right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{N}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, N$ bei N Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_T(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

b) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_T(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

c) Berechnen Sie $Q_{TS}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $N = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{TS}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{4}$$

d) Berechnen Sie $Q_{TS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $N = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{TS}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

3) Quadratur nach Romberg

Bei Quadratur nach Romberg kombiniert man zwei Trapezsummen unterschiedlicher Schrittweiten $Q_{TS}(f, h_1), Q_{TS}(f, h_2)$ um das exakten Ergebnis

$$I(f) = \lim_{h \to 0} Q_{TS}(f, h)$$

besser zu approximieren[1]. Die Kombinationsregel lautet so:

$$Q_{TS}(f, h_{neu}) = Q_{TS}(f, h_2) + \frac{Q_{TS}(f, h_2) - Q_{TS}(f, h_1)}{\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}\right) - 1}.$$

Diese Kombinationsregel ist ähnlich wie die von das Aitken-Neville und Newton Polynominterpolation. Wir können ein ähnliches Dreiecksschema aufbauen:

$$\begin{array}{c|c|rcccccc}
h_k & k & Q_{k0} & & Q_{k1} & & \dots & & Q_{kn} \\
\hline
\frac{b-a}{1} & 0 & Q_{TS}(f; \frac{b-a}{1}) = Q_{00} & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & \\
\frac{b-a}{2} & 1 & Q_{TS}(f; \frac{b-a}{2}) = Q_{10} & \to & Q_{11} & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
\frac{b-a}{4} & 2 & Q_{TS}(f; \frac{b-a}{4}) = Q_{20} & \to & Q_{21} & \to & \dots & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
\frac{b-a}{2^n} & n & Q_{TS}(f; \frac{b-a}{2^n}) = Q_{n0} & \to & Q_{n1} & \to & \dots & \to & Q_{nn}
\end{array}$$

Das Ergebnis steht in Q_{nn}.

In dieser Aufgabe werden wir Quadratur nach Romberg verwenden um das Integral

$$\int_{-2}^{2} -x^2 + 4dx$$

zu berechnen.

a) Füllen Sie die erste Spalte der Tabelle bis $k = 2$ aus! Für $k > 0$ können Sie die folgende Eigenschaft von Trapezsummen verwenden:

$$Q_{TS}(f; h) = \frac{Q_{TS}(f; 2h)}{2} + h \cdot (f_1 + f_3 + \ldots + f_{N-3} + f_{N-1}), \tag{5}$$

b) Füllen Sie den Rest der Tabelle aus! Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den aus Aufgabe 2c)!

[1] Es wird Richardson-Extrapolation verwendet.

4) Simpsonregel (Keplersche Fassregel) und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 2) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_S(f)$ und $Q_{SS}(f;h)$ der Simpson und der Simpson-Summe:

$$Q_S(f) = H \cdot \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6} \tag{6}$$

$$Q_{SS}(f;h) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)\,, \tag{7}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{N}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, N$ bei N Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_S(g)$ nach der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$.

b) Berechnen Sie $Q_{SS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (7) für $a = 0,\ b = 4$ und $N = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{SS}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{SS}(f;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{8}$$