Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Michael Rippl
Fabio Gratl

SoSe 2018

Numerisches Programmieren, Übungen

11. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

1) Separation der Variablen

Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ der beiden folgenden Anfangswertprobleme (AWP) mit Hilfe der Separation der Variablen:

a) $\dot{y}(t) = 2y(t), \quad y(0) = y_0, \ t \geq 0,$

b) $\dot{y}(t) = 2ty(t), \quad y(0) = y_0, \ t \geq 0.$

2) Einschrittverfahren

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad f(t, y(t)) = t \cdot y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

b) Berechnen Sie im Intervall $[0; 4]$ numerische Lösungswerte y_k, welche die Lösung $y(t)$ in den Stellen t_k approximieren, d.h. $y_k \approx y(t_k)$. Rechnen Sie mit Schrittweite $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$ und verwenden Sie die folgenden Verfahren:

   i) **Explizites Euler-Verfahren**:

   Bei diesem Verfahren wird lediglich die Steigung im aktuellen Punkt t_k zur Berechnung der numerischen Lösung betrachtet:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k); \end{aligned}$$

   ii) **Verfahren von Heun**:

   Analog zur Trapezregel bei der Quadratur wird bei diesem Verfahren im Vergleich zum Euler-Verfahren ein zweiter f-Wert zur numerischen Berechnung der Steigung hinzugezogen:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)) \right); \end{aligned}$$

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren**:

Analog zur Fassregel werden hier Zwischenwerte T_i für die Näherung der Steigung berechnet und mit 1/6 gewichtet:

$$
\begin{aligned}
t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\
T_1 &= f(t_k,\ y_k); \\
T_2 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_1); \\
T_3 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_2); \\
T_4 &= f(t_{k+1},\ y_k + \delta t T_3); \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{6} \cdot (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)\,;
\end{aligned}
$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse der einzelnen Verfahren mit der analytischen Lösung. Was stellen Sie fest und wie lässt sich dies deuten?

3) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Gegeben sei das folgende AWP:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad f(t, y(t)) = -12(y(t))^2, \qquad y(1) \;=\; 1, \qquad t \geq 1$$

Dabei ist bekannt, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 1$ gilt. Gesucht ist eine Näherungslösung $y_1 \approx y(t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 1.5$.

a) Lösen Sie das AWP analytisch mit Hilfe der Separation der Variablen und berechnen Sie die exakte Lösung $y(1.5)$!

b) Berechnen Sie y_1 mit Hilfe des expliziten Eulers.

c) Wenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

zur Berechnung von y_1 an, und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

Zum Abschluss des Kapitels über gewöhnliche Differentialgleichungen ist nachfolgend wieder eine Aufgabe aus einer Semestralklausur aufgeführt. Diese ist dazu gedacht, den Stoff noch einmal selbst üben zu können. Sie wird deshalb nicht in der Übung behandelt.

Wiederholung: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + \mu \cdot y(t) &= 0, \\ y(2) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\mu, y_0 \in \mathbb{R}$ und $t \geq 2$.

a) Bestimmen Sie die analytische Lösung des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

b) Nun soll das AWP numerisch mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens (Rückwärts-Euler) gelöst werden. Formulieren Sie die Verfahrensvorschrift und berechnen Sie für $\mu = 2$ eine Näherungslösung des AWPs (1) an der Stelle $t = 3$, basierend auf dem impliziten Euler-Verfahren mit Schrittweite $\delta t = 0.25$.

c) In der Praxis lässt sich die aus dem impliziten Euler-Verfahren resultierende, in der Regel nicht-lineare Gleichung nicht analytisch lösen. Nennen Sie zwei Verfahren, mit denen die Gleichung numerisch gelöst werden kann.

d) Zeigen Sie, dass das **explizite** Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \varphi(y_k, t_k)$$

die Konsistenzordnung 1 besitzt, d.h. dass

$$|y(t_1) - y_1| = \mathcal{O}(\delta t^2)$$

gilt. Dabei bezeichnet y_1 die numerische Näherung des expliziten Euler-Verfahrens nach einem Zeitschritt und $y(t_1)$ die exakte Lösung eines allgemeinen AWPs der Form

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \varphi(y, t), . \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

<u>Hinweis:</u> Entwickeln Sie die exakte Lösung $y(t_1)$ in eine Taylor-Reihe.