

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 5. Übungsblatt: Interpolation

1) Interpolation mit Unterschiedliche Basis Funktionen

Für Stützpunkte x_0, \dots, x_n und Basisfunktionen g_0, \dots, g_n , sieht das lineare Gleichungssystem für die Interpolation so aus:

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

a) Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

b) "trigonometrische" Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x),$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Tchebycheff-Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = (2x^2 - 1) - 5x + 4 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

d) Lagrange-Basispolynome

$$l_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-2)(0-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$l_1 = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-2)(1-0)} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$l_2 = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = 3 \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 2x^2 - 5x + 3$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Vergleich von a), c) und d): **Interpolationspolynom** ist eindeutig!

2) Polynominterpolation nach Newton

a) Für die Newtonschen dividierten Differenzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 [x_0]f &= f(x_0) = 3 \\
 [x_1]f &= f(x_1) = 0 \\
 [x_2]f &= f(x_2) = 1 \\
 [x_0, x_1]f &= \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} = \frac{0 - 3}{1 - 0} = -3 \\
 [x_1, x_2]f &= \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{2 - 1} = 1 \\
 [x_0, x_1, x_2]f &= \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{1 - (-3)}{2 - 0} = 2
 \end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
0	0	$f(x_0) = \boxed{3}$	→	$\boxed{-3}$
			↘	
1	1	$f(x_1) = 0$	→	1
			↘	
2	2	$f(x_2) = 1$		

Nützen wir nun die Werte $[x_0, \dots, x_i]f$ aus der obersten Zeile des Dreiecks als Koeffizienten des Polynoms in der Darstellung (4), so erhalten wir das Interpolationspolynom $p(x)$ zu

$$\begin{aligned}
 p(x) &= [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \dots + [x_0, \dots, x_n]f \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \\
 &= \boxed{3} + \boxed{-3}(x - 0) + \boxed{2}(x - 0)(x - 1) = \boxed{2x^2 - 5x + 3}.
 \end{aligned}$$

b) Ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ lässt sich (unabhängig von seiner x -Position) einfach unten an das Newton-Schema anhängen. Man muss nur die noch fehlenden dividierten Differenzen berechnen:

$$\begin{aligned}
 [x_3]f &= f(x_3) = 0 \\
 [x_2, x_3]f &= \frac{[x_3]f - [x_2]f}{x_3 - x_2} = \frac{0 - 1}{1.5 - 2} = 2 \\
 [x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f}{x_3 - x_1} = \frac{2 - 1}{1.5 - 1} = 2 \\
 [x_0, x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} = \frac{2 - 2}{1.5 - 0} = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
0	0	$f(x_0) = 3$	$\rightarrow -3$	$\rightarrow 2$	$\rightarrow \boxed{0}$
			\nearrow	\nearrow	\nearrow
1	1	$f(x_1) = 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 2$	
			\nearrow	\nearrow	
2	2	$f(x_2) = 1$	$\rightarrow 2$		
			\nearrow		
1.5	3	$f(x_3) = 0$			

Der zusätzliche Term für $q(x)$ besteht dann aus $[x_0, x_1, x_2, x_3]f \cdot (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Dass dieser Anteil verschwindet, ist nötig, da der Zusatzpunkt $(1.5, 0)$ auch schon auf dem ersten Interpolationspolynom $p(x)$ liegt! Deswegen muss aufgrund der Eindeutigkeit der Polynominterpolation $p(x) = q(x)$ gelten.

3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Die zu interpolierenden Punkte (*hier für alle vier Punkte*) sind:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & f(x_0) &= 3 \\ x_1 &= 1, & f(x_1) &= 0 \\ x_2 &= 2, & f(x_2) &= 1 \\ x_3 &= 1.5, & f(x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Auswertung des Algorithmus ($p[i, 0] = f(x_i)$ ist ja klar):

$k = 1$:

$$\begin{aligned} p[0, 1] &= p[0, 0] + \frac{x - x[0]}{x[1] - x[0]} (p[1, 0] - p[0, 0]) = 3 + \frac{0.5 - 0}{1 - 0} (0 - 3) = 1.5 \\ p[1, 1] &= p[1, 0] + \frac{x - x[1]}{x[2] - x[1]} (p[2, 0] - p[1, 0]) = 0 + \frac{0.5 - 1}{2 - 1} (1 - 0) = -0.5 \\ p[2, 1] &= p[2, 0] + \frac{x - x[2]}{x[3] - x[2]} (p[3, 0] - p[2, 0]) = 1 + \frac{0.5 - 2}{1.5 - 2} (0 - 1) = -2 \end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned} p[0, 2] &= p[0, 1] + \frac{x - x[0]}{x[2] - x[0]} (p[1, 1] - p[0, 1]) = 1.5 + \frac{0.5 - 0}{2 - 0} (-0.5 - 1.5) = 1 \\ p[1, 2] &= p[1, 1] + \frac{x - x[1]}{x[3] - x[1]} (p[2, 1] - p[1, 1]) = -0.5 + \frac{0.5 - 1}{1.5 - 1} (-2 - (-0.5)) = 1 \end{aligned}$$

$k = 3$:

$$p[0, 3] = p[0, 2] + \frac{x - x[0]}{x[3] - x[0]} (p[1, 2] - p[0, 2]) = 1 + \frac{0.5 - 0}{2 - 0} (1 - 1) = \boxed{1}$$

Für das Dreiecksschema erhält man somit:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
0	0	$f(x_0) = 3$	\rightarrow 1.5	\rightarrow 1	\rightarrow 1
1	1	$f(x_1) = 0$	\rightarrow -0.5	\rightarrow 1	
2	2	$f(x_2) = 1$	\rightarrow -2		
1.5	3	$f(x_3) = 0$			

Der Wert von $p(x = 0.5)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = 2x^3 - 5x + 3$ an der Stelle $x = 0.5$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

4) Fehlerabschätzung

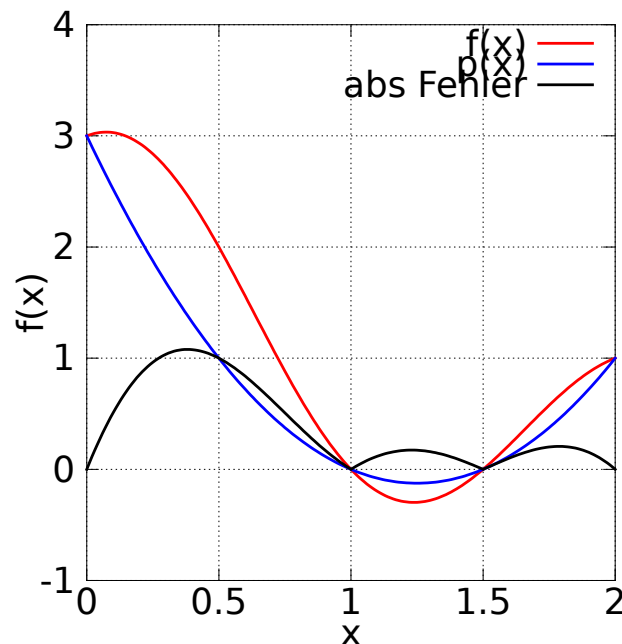


Abbildung 1: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.

a) $|f(0.5) - p(0.5)| = |2 - 1| = 1$

b) Mit den drei Punkten:

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^3 f(\xi)}{3!} \cdot (0.5 - 0)(0.5 - 1)(0.5 - 2) \right| \\ &= \frac{1}{16} \cdot |D^3 f(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{16} \cdot \max_{x \in [0, 2]} |D^3 f(x)| = \frac{1}{16} 35.43 \approx 2.21 \end{aligned}$$

oder mit den vier Punkten:

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^4 f(\xi)}{4!} \cdot (0.5 - 0)(0.5 - 1)(0.5 - 1.5)(0.5 - 2) \right| \\ &= \frac{1}{64} \cdot |D^4 f(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{64} \cdot \max_{x \in [0, 2]} |D^4 f(x)| = \frac{1}{64} 107.53 \approx 1.68 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Funktion war

$$f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin(\pi x).$$