Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Michael Rippl
Fabio Gratl

SoSe 2018

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 9. Übungsblatt: Fixpunktiteration

1) Algorithmus zur Quadratwurzelberechnung

a) Für einen guten Startwert benötigen wir einen möglichst guten Näherungswert der Lösung. Dazu approximieren wir die Funktion $g(a) = \sqrt{a}$ im Intervall$[1, 4]$ zum Beispiel mit einer Geraden durch die beiden Randpunkte $(1|1)$ und $(4|2)$. Wir erhalten somit

$$b_0(a) = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}.$$

Eine bessere Näherung erzielt man, indem man die Wurzelfunktion mittels einer Parabel durch die drei Punkte $(1|1)$, $(\frac{9}{4}|\frac{3}{2})$ und $(4|2)$ interpoliert (vgl. Abb. **??**). Hier erhält man

$$b_0(a) = -\frac{4}{105}a^2 + \frac{11}{21}a + \frac{18}{35}$$

als Nährungswert und somit guten Startwert.

b) Wir wenden auf die Funktion $f(x) = x^2 - a$ das Newton-Verfahren

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

an und erhalten

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = x_k - \left(\frac{x_k}{2} - \frac{a}{2x_k}\right) = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Die rechte Seite entspricht gerade der Iterationsfunktion Φ.

c) Um das allgemeine Problem ($a \notin [1; 4[$) auf das spezielle Problem ($a \in [1; 4[$) zurückzuführen, zerlegen wir a in

$$a = \bar{a} \cdot 4^p = \bar{a} \cdot 2^{2p}$$

mit $\bar{a} \in [1; 4[$. Damit ergibt sich die Wurzel von a zu

$$\sqrt{a} = \sqrt{\bar{a}} \cdot 2^p.$$

Wenn a bereits in Binärdarstellung gegeben ist (d.h. $a = M \cdot 2^E$), dann kann man p und $\bar{a}$ durch Bitmanipulation sogar direkt aus der Maschinendarstellung gewinnen.

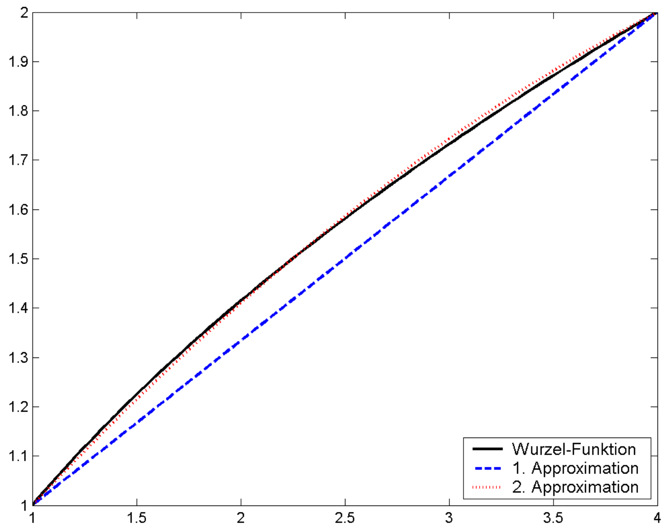


Abbildung 1: Approximation der Wurzelfunktion mit einer Geraden bzw. einer Parabel

d) Die Fixpunkteigenschaft folgt durch Einsetzen, denn

$$\Phi_1(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}^3}{a} = \sqrt{a} \quad \text{und} \quad \Phi_2(\sqrt{a}) = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

Für Φ_1 rechnet man

$$\Phi_1'(\sqrt{a}) = \frac{3\sqrt{a}^2}{a} = 3 > 1$$

und stellt sofort fest, dass $\sqrt{a}$ ein abstoßender Fixpunkt ist. Für Φ_2 stellt man fest, dass

$$\Phi_2'(\sqrt{a}) = -\frac{a}{\sqrt{a}^2} = -1.$$

Somit ist eine genauere Untersuchung notwendig. Dabei zeigt sich für $x_0 \neq \sqrt{a}$, dass

$$x_1 = \frac{a}{x_0} \neq \sqrt{a} \quad \text{und} \quad x_2 = \Phi_2(x_1) = x_0 \neq \sqrt{a}$$

gilt. Also alterniert die Iteration zwischen zwei Werten hin und her. Folglich konvergiert sie nicht und $\sqrt{a}$ kann kein anziehener Fixpunkt sein.

2) Banach'scher Fixpunktsatz

a) Die Fixpunktgleichung lautet

$$x = \Phi(x) = x(x^2 - 1) + x = x^3$$

und hat die drei Lösungen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Für die Entscheidung über die Anziehungskraft betrachten wir die erste Ableitung $\Phi'(x) = 3x^2$ und stellen fest:

- $\Phi'(x_0) = 0$, folglich ist x_0 ein anziehender Fixpunkt.
- $\Phi'(x_1) = 3$, folglich ist x_1 ein abstoßender Fixpunkt.
- $\Phi'(x_2) = 3$, folglich ist x_2 ein abstoßender Fixpunkt.

b) Wir definieren das Intervall $I := [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ und überprüfen die Bedingungen des Banach'schen Fixpunktsatzes:

- I ist abgeschlossen.
- Sei $x \in I$, also $|x| \leq \frac{1}{2}$, dann gilt $|\Phi(x)| = |x^3| < \frac{1}{2}$. Folglich ist Φ eine Abbildung von I nach I.
- Seien $x, y \in I$ beliebig. Mit dem Mittelwertsatz (MWS)

$$\exists \xi \in [a, b] : \; f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

angewendet auf Φ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= |x^3 - y^3| \overset{MWS}{\leq} |x - y| \cdot \max_{z \in [x,y]} |3z^2| \\ &\leq \max_{z \in I} (3z^2) \cdot |x - y| = \frac{3}{4}|x - y| \; . \end{aligned}$$

Also ist die letzte Bedingung mit $L = \frac{3}{4}$ erfüllt.

Folglich konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte aus dem Intervall $I := [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ gegen den Fixpunkt $x_0 = 0$.

Wiederholung: Fixpunktiteration

a) Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right).$$

b) Wir lösen die Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{1}{2} \cdot x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Klassifikation:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ |\Phi'(+1)| &= 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{anziehend} \\ |\Phi'(-1)| &= 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{anziehend} \end{aligned}$$

c) Als Grenzwerte an den Rändern erhalten wir

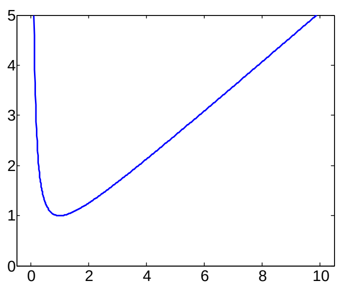
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \Phi(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Bestimmung von Extrema:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{(vgl. ii)!)} \\ \Rightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Folglich hat Φ im Intervall $]0, \infty[$ bei $(1|1)$ ein globales Minimum.

Graph von Φ:



d) i) Φ hat in $]0,\infty[$ ein globales Minimum bei $(1|1)$ (vgl. c))!).

ii) Aus $\Phi(x) \geq 1$ für $x > 0$ folgt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \geq 1$ wegen $x_0 > 0$ für $k = 1, 2, \ldots$.

iii) Wegen (2) ist $x_k \geq 1$, somit folgt für $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = \frac{1}{2}\left(x_k + \underbrace{\frac{1}{x_k}}_{1 \leq x_k}\right) \leq \frac{1}{2}(x_k + x_k) = x_k$$

Aus (1)-(3) folgt, dass x_k (für $k \geq 1$) nach unten beschränkt ist. Außerdem ist die Folge monoton fallend. Somit konvergiert die Iteration, falls $x_0 > 0$.

e) Wir setzen mit der Bedingung für einen Fixpunkt an:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} &= x \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x - \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f entsprechen den Fixpunkten von Φ und sind damit ± 1.

f) Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Funktion

$$f(x) := x - \Phi(x) = x - \frac{1}{x}$$

ergibt

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \frac{1}{x_k}}{1 + \frac{1}{x_k^2}} \\ &= x_k - \frac{x_k^2 - 1}{x_k} \cdot \frac{x_k^2}{x_k^2 + 1} = x_k - \frac{(x_k^2 - 1) \cdot x_k}{x_k^2 + 1}. \end{aligned}$$