

QR-Verfahren

Gesucht sind alle Eigenwerte/vektoren!

1. Schritt: transformiere A auf Tridiagonalform (obere Hessenberg) ohne die Eigenwerte zu verändern?

Am besten orthogonale Basistransformation mit orthonormalem Q:


$$A_{\text{neu}} = Q^* A Q^T$$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A Q^T (Qx) = \lambda Q^T (Qx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{neu}} y = Q A Q^T y = \lambda y, \quad y = Qx$$

Matrix wie $Q^* A Q^T$, Eigenwert gleich, Eigenvektor wie Qx

Welches Q? Givens?

a_{11}	a_{12}	a_{13}	\dots	\dots	\dots	\dots	a_{1n}
	a_{22}	a_{23}	\dots			\dots	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	\dots			\dots	a_{3n}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	\dots			\dots	a_{4n}
\vdots	a_{52}	a_{53}	\dots			\dots	a_{5n}
\vdots	\vdots	a_{63}	\dots			\dots	a_{6n}
\vdots	\vdots	\vdots					\vdots
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	\dots	\dots	\dots	\dots	a_{nn}

Von links Givens zur Elimination von a_{21} ?
Anwendung von rechts füllt a_{21} wieder auf!

Besser:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & & & \cdots & a_{2n} \\
 \bullet & a_{32} & a_{33} & \cdots & & & \cdots & a_{3n} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & & & \cdots & a_{4n} \\
 \vdots & a_{52} & a_{53} & \cdots & & & \cdots & a_{5n} \\
 \vdots & \vdots & a_{63} & \cdots & & & \cdots & a_{6n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}
 \end{pmatrix}$$

Von links Givens zur Elimination von a_{31} ?
 Anwendung von rechts verändert a_{21} nicht!

Insgesamt:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
 \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \cdots & & & \cdots & a_{2n} \\
 \bullet & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \cdots & & & \cdots & a_{3n} \\
 \bullet & \bullet & \boxed{a_{43}} & \cdots & & & \cdots & a_{4n} \\
 \vdots & \bullet & \bullet & \ddots & & & \cdots & a_{5n} \\
 \vdots & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & & \cdots & a_{6n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & a_{n,n-1} & a_{nn}
 \end{pmatrix}$$

Führt im Endeffekt auf Tridiagonalform für symmetrisches A , bzw. obere Hessenbergform für allgemeines A .

2. Schritt: QR-Verfahren:



Nachdem A auf Tridiagonal(Hessenberg)gestalt transformiert ist:

Berechne zu A die QR-Faktorisierung $A=QR$ und setze

$$A_{\text{neu}} = RQ$$

Daher gilt $R=Q^T A$.

Damit ist $A_{\text{neu}} = Q^T A Q$ mit denselben Eigenwerten!

Wiederhole iterativ.

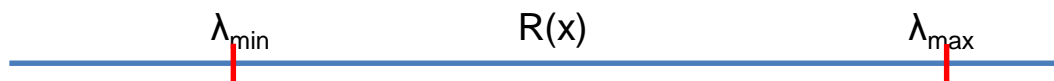
Im Endeffekt konvergiert A gegen Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.

Einige zusätzliche Tricks dabei!

Rayleigh Quotient

$R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$ ist für symmetrisches A eine Funktion

$$R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$



Das Maximum von $R(x)$ ist der größte Eigenwert, das Minimum der kleinste.

$R(x)$ ist der Range/Wertebereich der Matrix A , enthält alle Eigenwerte.

VII. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen



7.1. Gewöhnliche Diff'gleichungen (erster Ordnung)

Frage: Warum Differentialgleichungen?

Diff'gleichungsproblem allgemein: Aus Beziehungen zwischen den Änderungen (Ableitungen) und den Funktionswerten soll eine gesuchte Funktion bestimmt werden!

Aufgabe: Funktion $y(x)$ nur implizit gegeben durch Bedingungen an die Ableitung $y' \rightarrow y$??

$$y' = \varphi(y, x) \quad \rightarrow \quad y(x) ?$$

Ableitung von $y(x)$ nach x in jedem möglichen Punkt (x, y) ist gegeben durch Funktion $\varphi(x, y)$.

7.1.1. Beispiel: Freier Fall



Kugel wird aus Höhe h_0 losgelassen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, Erdbeschleunigung g .

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt},$$
$$-g = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Diff'gleichung für $v(t)$: $\dot{v}(t) = \varphi_1(v, t) = -g \quad (= \ddot{s}(t))$

Integration \rightarrow
$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(\tau) d\tau = \int_0^t (-g) d\tau = -g \int_0^t d\tau = -gt;$$

Diff'gleichung für $s(t)$:

$$\dot{s}(t) = \varphi_2(s, t) = v(t) = -gt$$

$$\text{Integration} \rightarrow s(t) = h_0 + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h_0 - g \int_0^t \tau d\tau = h_0 - \frac{1}{2} gt^2.$$

Aus Anfangswerten $t_0 = 0$ und h_0 , und aus der Bedingung für die Ableitung wird die Funktion selbst bestimmt.

In dieser einfachen Form explizit lösbar durch Quadratur!

Im Allgemeinen ist das Integral nicht direkt lösbar,
oder

Diff'gleichung kann nicht auf Integral zurückgeführt werden.

7.1.2. Definition: Anfangswertproblem (AWP)

Aus Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und
Differentialgleichung $y'(x) = \varphi(y,x)$ soll
die Funktion $y(x)$ für $x > x_0$ bestimmt werden.

Dabei ist die Diff'gleichung hier in expliziter Form gegeben,
d.h. in der Form: $y'(x) = \dots$

Impliziter Fall: $\varphi(y',y,x) = 0 \rightarrow y' ???$

(Beispiel implizit: $y' \cdot \exp(y') = y+x$)

7.1.3. Beispiel für explizit lösbare Diff'gleichung:

$$y'(x) = \varphi(y, x) = \alpha y \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

Lösung durch Integration (Separation der Variablen)

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \alpha \cdot dx$$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x \alpha dt$$

$$\ln(y(x)) - \ln(y(x_0)) = \ln(y(x)) \Big|_{x_0}^x = \alpha \cdot t \Big|_{x_0}^x = \alpha(x - x_0)$$

und daher
$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$$

Beachte: y manchmal als einfache Variable,
manchmal als Funktion $y(x)$.

7.1.4. Geometrische Problemstellung:

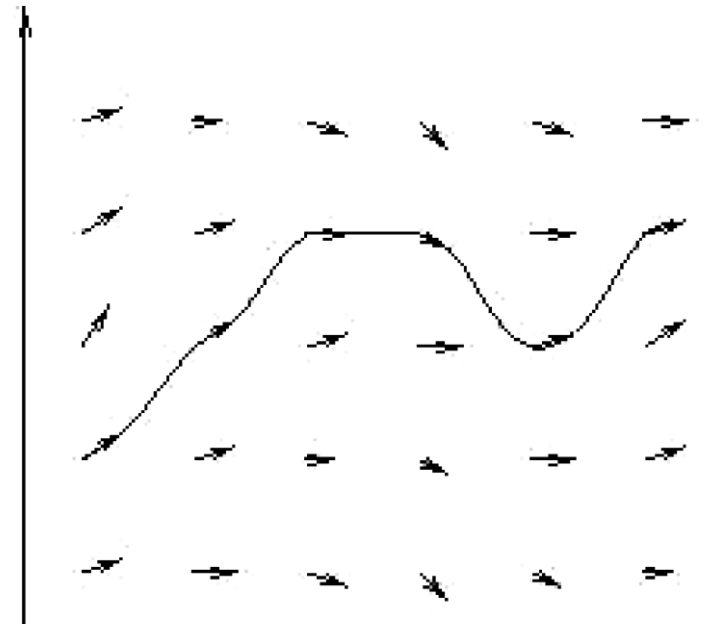
Von einer Funktion sind alle möglichen Ableitungswerte an allen möglichen Stellen (x,y) bekannt

(also überall an allen potentiellen Funktionswerten)

Dies entspricht einem Vektorfeld von Tangentenrichtungen

Weiterhin bekannt ist der Funktionswert an einer Stelle x_0 .

Gesucht: Kurve durch (x_0, y_0) , deren Tangenten in allen Punkten dem vorgegebenen Vektorfeld entspricht!



Im Beispiel ‚Freier Fall‘ ist dieses Vektorfeld trivial:

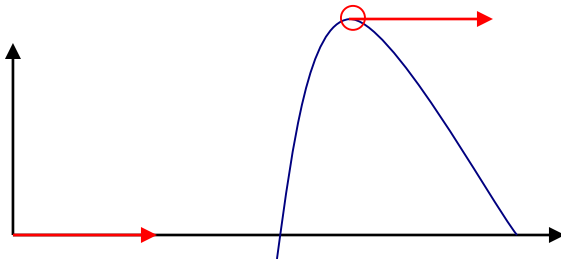
$$\dot{v}(t) = -g, \quad v(t_0) = 0.$$

Kurve $(t,v) \leftrightarrow v(t)$

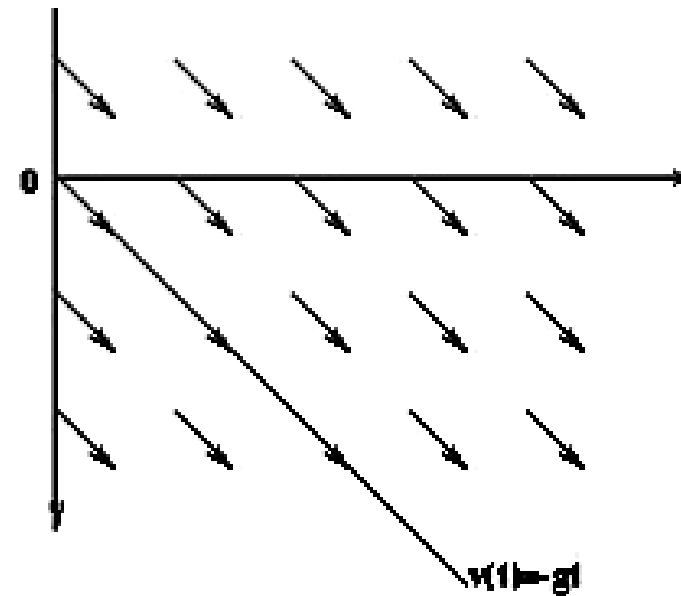
In der (t,v) -Ebene ist jede Tangentenrichtung durch den Vektor $(1,v')^T$ gegeben, Ableitung von $(t,v(t))$, also hier durch den Vektor $(1,-g)^T$.

Tangentenvektor $(t,v)' = (1,v')$

$v'=0$: Tangentenvektor $(1,0)^T$



Die Lösungskurve ist dann die Gerade mit Steigung $-g$ durch den Nullpunkt, also $v(t) = -gt$.



7.1.5. Das Eulerverfahren:

Gegeben AWP Anfangswertproblem

$$y'(x) = \varphi(y, x) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

Gesucht: $y(x)$ für $x \geq x_0$

Wir wollen $y(x)$ bei x_0 lokal als lineare Funktion $g(x)$ betrachten, und einen kleinen Schritt der Länge h zu $x_1 = x_0 + h$ entlang dieser linearen Näherung gehen.

Dadurch erhält man den Näherungswert

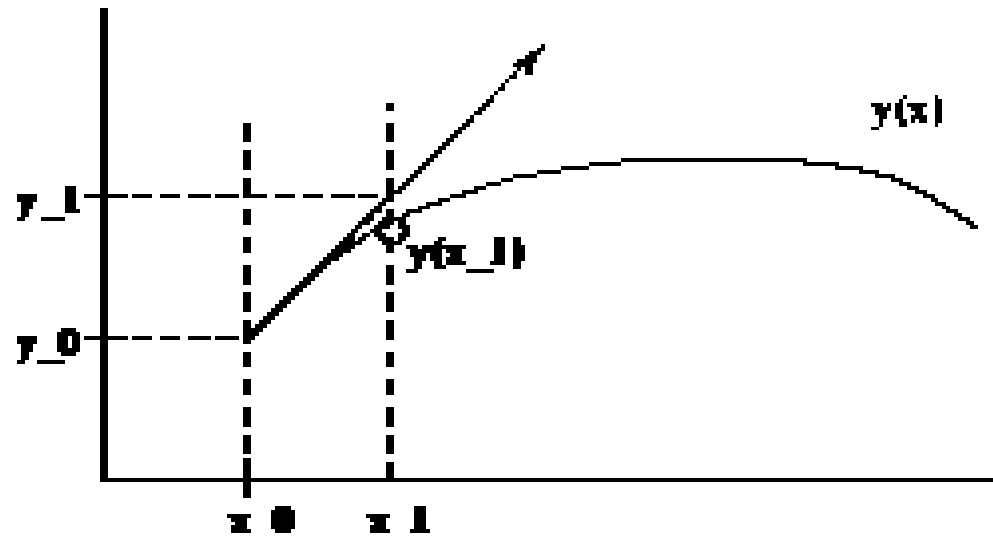
$$y(x_1) \approx y_1 = g(x_1) = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot \varphi(y_0, x_0)$$

Ersetze wieder Funktion lokal durch Tangentengerade!

Dies ergibt die Iterationsvorschrift des Eulerverfahrens (Vorwärts-Euler):

$$y_0 = y(x_0); \quad x_{k+1} = x_k + h; \quad y_{k+1} = y_k + h \cdot \varphi(y_k, x_k) \quad \text{für } k=0,1,\dots$$

Der Einfachheit halber wählen wir die Schrittweite h konstant (muss aber nicht sein).



Euler aus Integration:

Betrachte die Diff'gleichung zwischen x_0 und $x_1=x_0+h$:

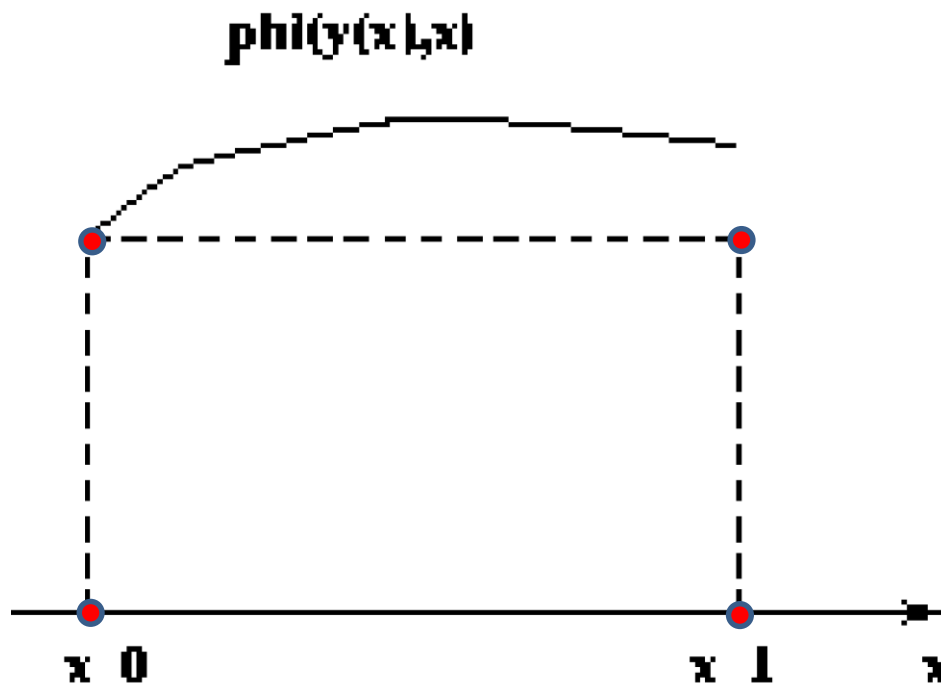
$$y_1 - y_0 = y(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(y(x), x) dx \approx (x_1 - x_0) \cdot \varphi(y_0, x_0).$$

aus Rechteckregel, indem die Fläche unter der Kurve $\varphi(y(x), x)$ angenähert wird durch die Fläche des Rechtecks mit den Ecken

$(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$,

und

$(x_1, \varphi(y_0, x_0))$, $(x_0, \varphi(y_0, x_0))$.



Eulerverfahren aus Taylorentwicklung :

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(z_0)$$

Bekannt sind $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = \varphi(y_0, x_0)$,
 mit Zwischenstelle z_0 . Der h^2 -Term ist klein und wird
 vernachlässigt \rightarrow Eulerverfahren.

Euler aus der Diskretisierung des Differentialquotienten:

$$\varphi(y_0, x_0) = y'_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

ergibt wieder das Eulerverfahren!

7.1.6.1. Rückwärts-Euler:

Der Diff'quotient kann natürlich mit derselben Berechtigung angenähert werden durch

$$\varphi(y_1, x_1) = y_1' = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Dies führt zu der Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \varphi(y_{k+1}, x_{k+1})$$

Vorteile? Nachteile?

Im Unterschied zum einfachen Euler taucht hier die Unbekannte y_{k+1} auch noch in der Funktion φ auf; das macht die Sache komplizierter.

$$y_{k+1} - \left(y_k + h \cdot \varphi(y_{k+1}, x_{k+1}) \right) = 0$$

Um y_{k+1} (=z) zu erhalten, ist die Nullstelle einer Funktion zu bestimmen, nämlich von

$$f(z) := z - h \cdot \varphi(z, x_{k+1}) - y_k \stackrel{!}{=} 0$$

Die berechnete Nullstelle \bar{z} ist dann die nächste Näherung

$$\bar{z} = y_{k+1} \approx y(x_{k+1})$$

Solche Verfahren heißen *implizite* Verfahren, im Gegensatz zum einfachen Eulerverfahren, das ein *explizites* Verfahren ist.

Zur Bestimmung von y_{k+1} kann man iterative Verfahren wie z.B. das Newtonverfahren verwenden.

Explizites Euler als „Predictor“ liefert Startwert für implizites Euler / Newtonverfahren als „Corrector“

7.1.6.2. Weitere Taylorpolynom-Verfahren: Berücksichtigung höherer Terme in der Taylorentwicklung:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''(z_0)$$

mit Zwischenstelle z_0 .

Hier taucht aber die unbekannte Ableitung $y''(x_0)$ auf.
Sie kann berechnet werden aus

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \varphi(y(x), x) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, x) \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y, x) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}$$

Benötigt: Partielle Ableitungen, Nachdifferenzieren (Kettenregel)

Also $y''(x_0) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, x) \Big|_{(y_0, x_0)} \cdot \varphi(y_0, x_0) + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y, x) \Big|_{(y_0, x_0)}$

und damit

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_k, x_k) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_k, x_k) \cdot \varphi(y_k, x_k) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y_k, x_k) \right)$$

Auf diese Art können beliebig hohe Ableitungen der Lösungsfunktion y an einer Stelle (y_k, x_k) auf Ableitungen der Funktion φ zurückgeführt werden.

Die nächste Iterierte erhält man aus dem Anfang der Taylorentwicklung an der letzten Stelle x_k .

Man spricht hier auch von Einschrittverfahren da stets

$$y_k \rightarrow y_{k+1}$$

Modifizierung: Runge-Kutta; vermeide höhere Ableitungen durch Mehrfachauswertung von φ .

(vgl. Newton/Sekanten-verfahren)

Beispiel: $y'(x) = \varphi(y, x) = yx;$

$$x_0 = 0; y(0) = 1;$$

Lösung: $\frac{dy}{y} = x \cdot dx \Rightarrow \ln(y(x)) - \ln(y(x_0)) = \frac{x^2}{2} \Big]_{x_0}^x$

$$\Rightarrow y(x) = y(x_0) \exp\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right);$$

Euler: $y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_k, x_k) = y_k + hy_k x_k = (1 + hx_k) y_k$

Rückwärts-Euler: $y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_{k+1}, x_{k+1}) = y_k + hy_{k+1} x_{k+1};$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - hx_{k+1}};$$

Beispiel: $y'(x) = \varphi(y, x) = yx;$
 $x_0 = 0; y(0) = 1;$

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, x) = \frac{\partial}{\partial y} (yx) = x; \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y, x) = \frac{\partial}{\partial x} (yx) = y;$$

$$\frac{d}{dx} \varphi(y(x), x) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi \cdot y' + \frac{\partial}{\partial x} \varphi = x(yx) + y = y(x^2 + 1);$$

Taylor 2. Ordnung:

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(y_k, x_k) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} (y_k, x_k) \cdot \varphi(y_k, x_k) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} (y_k, x_k) \right) =$$

$$= y_k + hy_k x_k + \frac{h^2}{2} (y_k (x_k^2 + 1)) = y_k \left(1 + hx_k + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} x_k^2 \right);$$

7.1.6.3. Mehrschrittverfahren:



Hier wird aus mehreren schon berechneten Iterierten das nächste y_{k+1} gewonnen, also

$$y_{k+1-m}, \dots, y_{k-1}, y_k \rightarrow y_{k+1}.$$

Solche Verfahren können sehr einfach aus Quadraturregeln hergeleitet werden, z.B.

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}) &= y(x) \Big|_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y'(x) dx = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(y(x), x) dx \approx \\ &\approx (x_{k+1} - x_{k-1}) \cdot \varphi(y_k, x_k) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Mittelpunktsregel.

Also

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h\varphi(y_k, x_k)$$

Idee von Mehrschrittverfahren:

Vermeide Berechnung höherer Ableitungen und benutze die berechneten Funktionswerte selbst, um den weiteren Verlauf der Lösung anzunähern.

Also finde beste Gerade/Parabel ..., die durch die bisher berechneten Punkte geht.

7.1.7. AWP für Diff'gleichungen erster Ordnung im \mathbb{R}^n :

Sei
$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{pmatrix}^T$$

Also
$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \end{pmatrix}^T = \varphi(y, x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n, x) & \cdots & \varphi_n(y_1, \dots, y_n, x) \end{pmatrix}^T$$

mit vorgegebenem Startvektor

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \end{pmatrix}^T$$

Lösung genauso durch Euler im \mathbb{R}^n :

$$y^{k+1} = \begin{pmatrix} y_1^{k+1} \\ \vdots \\ y_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1^k, \dots, y_n^k, x_k) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1^k, \dots, y_n^k, x_k) \end{pmatrix}$$

7.1.8. AWP für Diff'gleichungen höherer Ordnung in \mathbb{R} :

Gegeben eine Bedingung für die j -te Ableitung der skalaren Funktion $y(x)$

$$\frac{d^j}{dx^j} y(x) = y^{(j)}(x) = \Psi(y^{(j-1)}, \dots, y, x)$$

mit Anfangswerten

$$\begin{pmatrix} y^{(j-1)}(x_0) \\ \vdots \\ y(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^{(j-1)} \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Umformulieren in Diff'gleichung erster Ordnung im \mathbb{R}^j :

Definiere dazu Vektorfunktion $u(x) = (u_1(x), \dots , u_j(x))^T$
und setze

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= y(x) , \\ u_2(x) &:= y'(x) , \\ &\dots \\ u_j(x) &:= y^{(j-1)}(x) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $u(x)$

$$u'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_{j-1}'(x) \\ u_j'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ \vdots \\ u_j(x) \\ \Psi(u_j, \dots, u_1, x) \end{pmatrix} = \varphi(u, x)$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x_0) = \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ \vdots \\ u_j(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y^{(j-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(j-1)} \end{pmatrix}$$

Insgesamt kann man nun wieder das Vektor-Eulerverfahren anwenden:

$$u^{k+1} = u^k + h \cdot \varphi(u^k, x_k)$$

7.1.9. Fehleranalyse:

Start bei $a = x_0$,

Gesuchter Wert $b = x_n$,

Bei äquidistanter Einteilung ist Schrittweite $h := (b-a)/n$

Damit $x_j = x_0 + jh$, $j=0,1,\dots,n$

Definition lokaler Diskretisierungsfehler:

An der Stelle x_k ist der lokale Diskret.-Fehler gegeben durch

$$\left| y_{k+1} - y(x_{k+1}) \right| = \left| e_k \right|$$

Also der Fehler, der in einem Schritt von (y_k, x_k) nach (y_{k+1}, x_{k+1}) entsteht.

Dabei gehen wir von x_k entlang der Lösung $y(x)$ durch y_k

Wie gut erfüllt die Lösung $y(x)$ die Näherungsgleichung? 24

Definition globaler Diskretisierungsfehler:

Für das AWP zur Bestimmung der Lösung an der Stelle b ist der globale Diskret.-Fehler gegeben durch

$$|y_n - y(b)| = |y_n - y(x_n)| = |g_n|$$

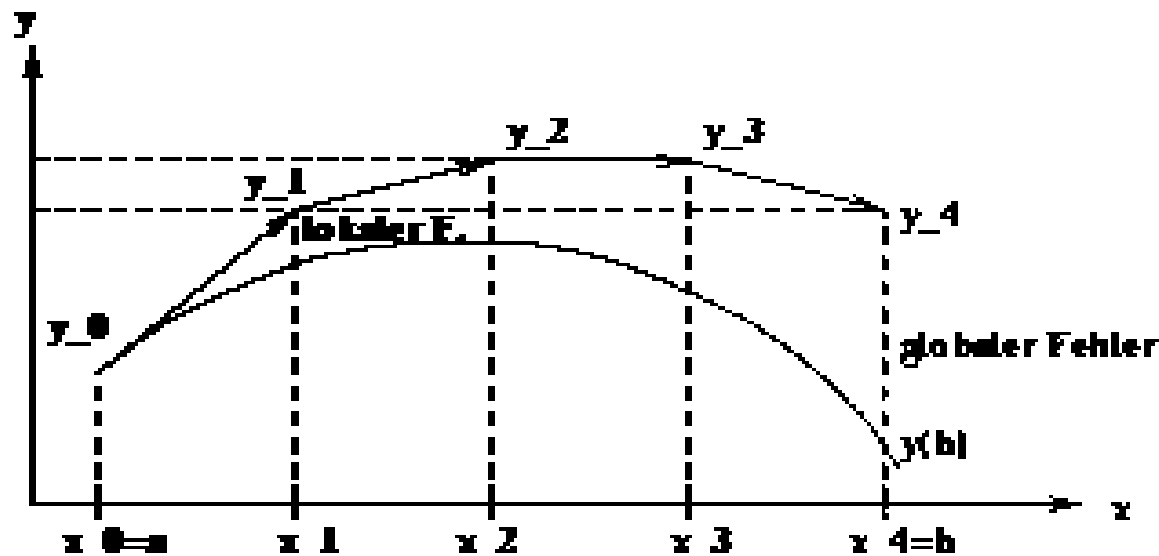
Definition der Konvergenz:

Die durch unser Lösungsverfahren erzeugte Folge heißt konvergent, wenn gilt

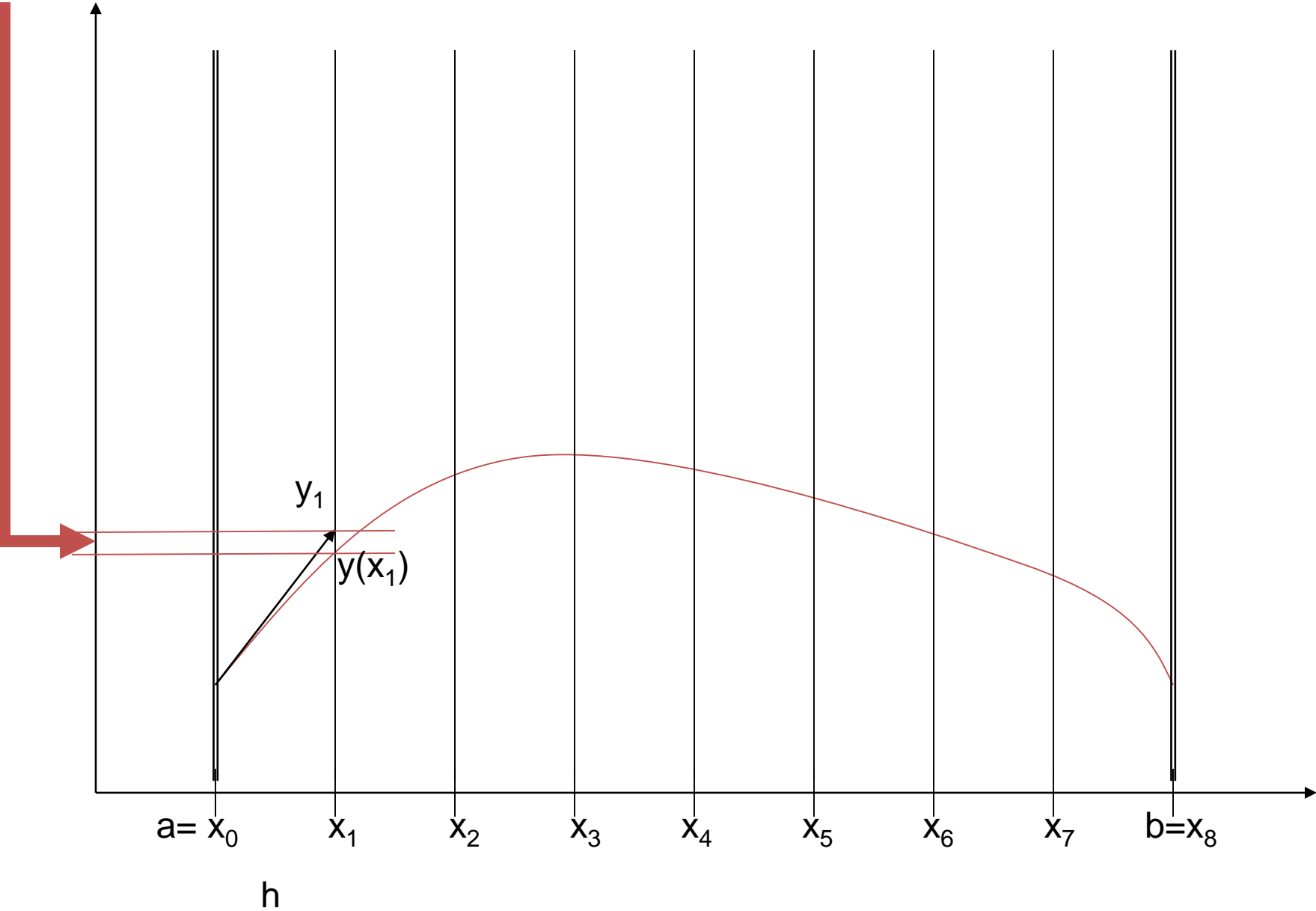
$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} y_n = y(b)$$

Wenn also in exakter Arithmetik bei immer feineren Unterteilungen der Näherungswert gegen den exakten Wert konvergiert.

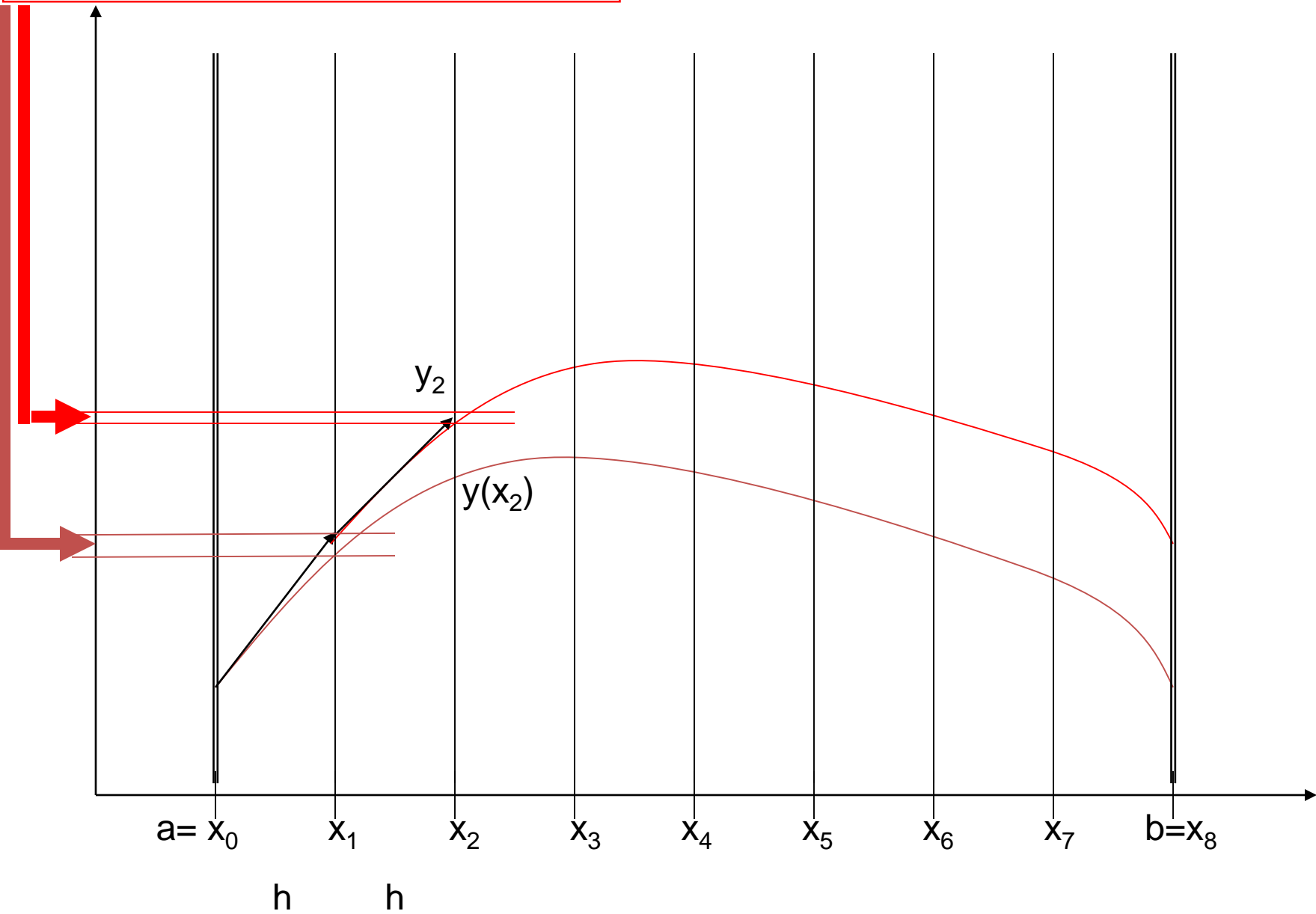
Das bedeutet natürlich auch, dass der globale Fehler gegen 0 gehen muss!



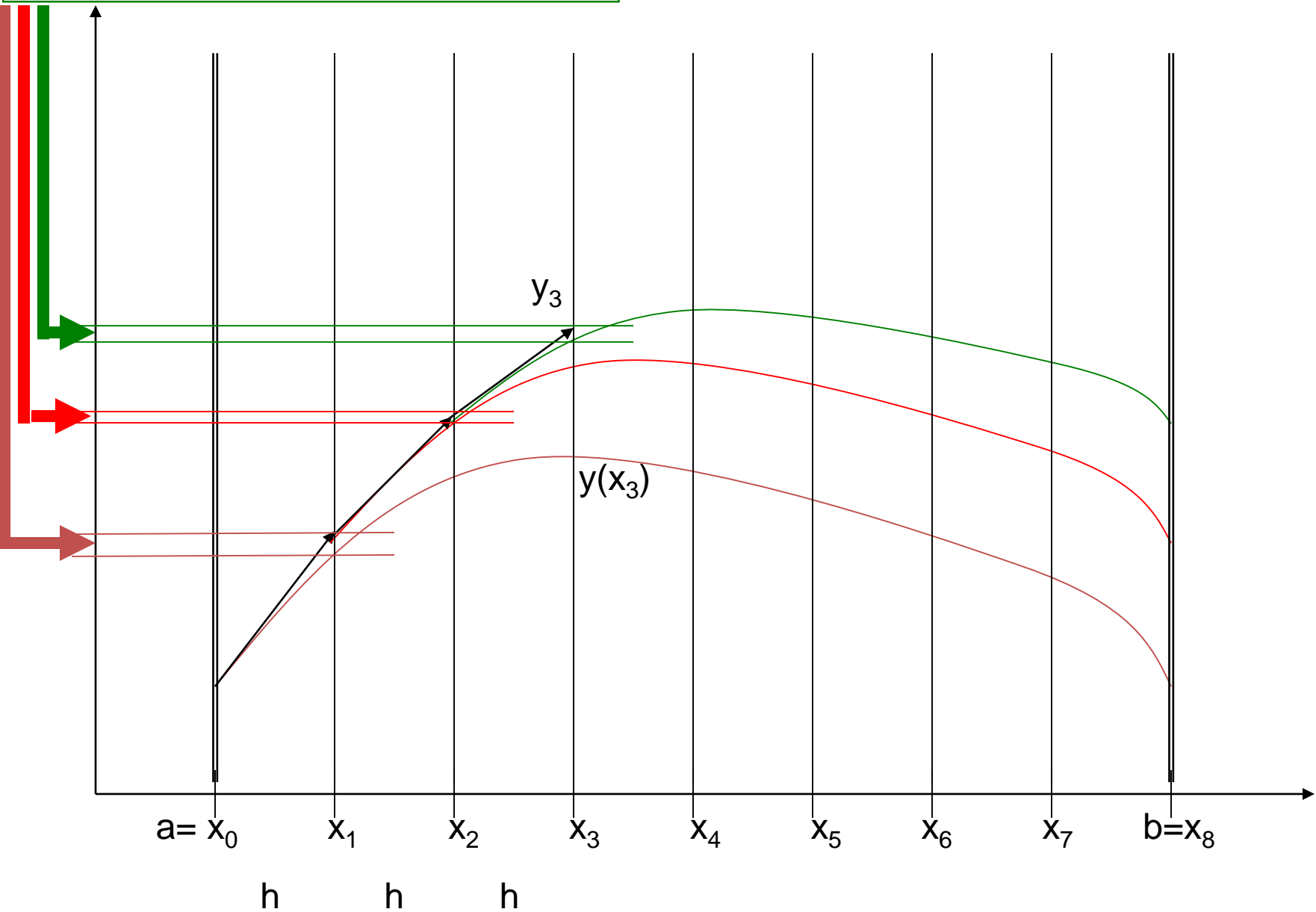
Lokaler Diskretisierungsfehler



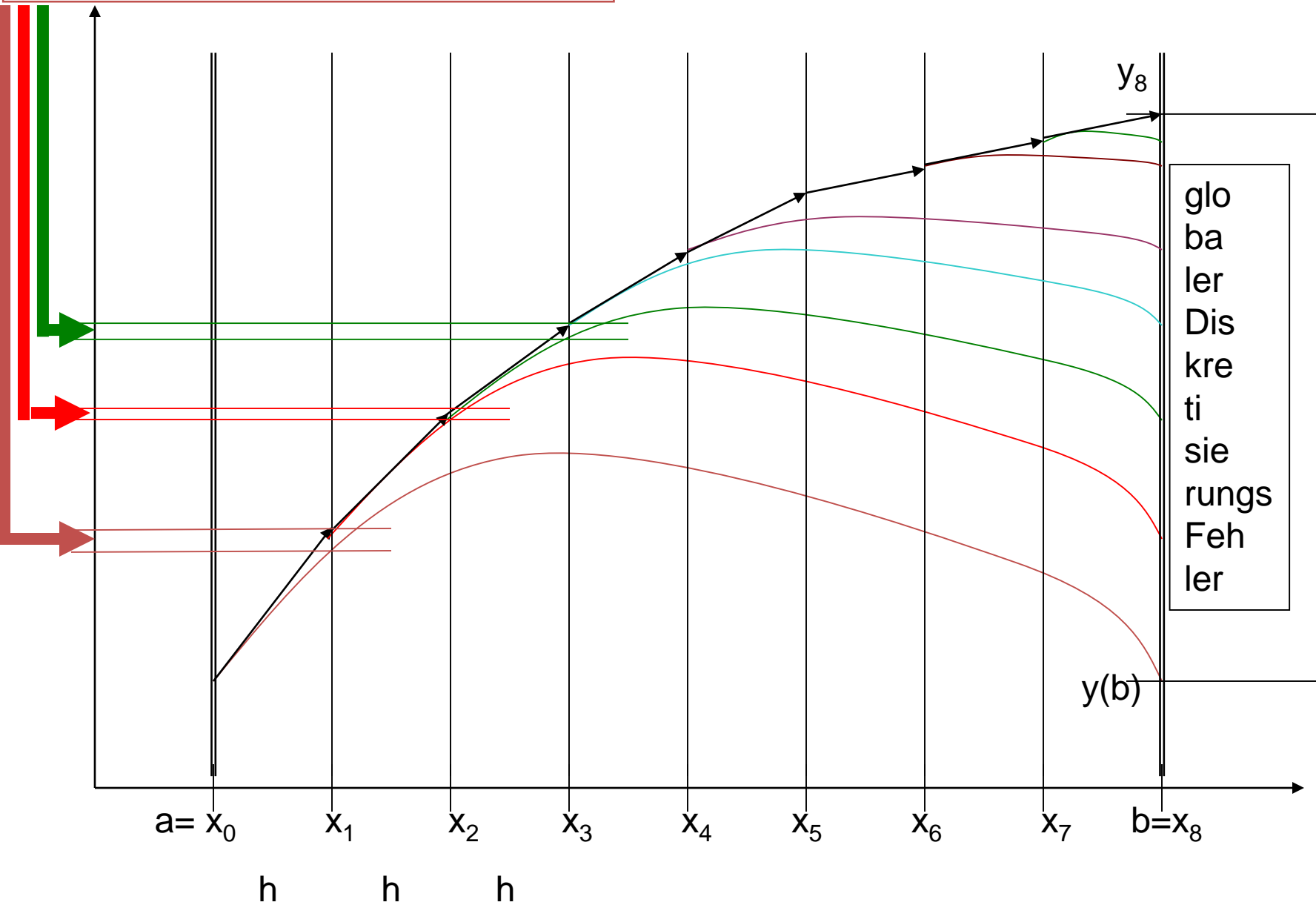
Lokaler Diskretisierungsfehler



Lokaler Diskretisierungsfehler



Lokaler Diskretisierungsfehler



An jeder Stelle x_k treten neue lokale Fehler auf und addieren sich zum globalen Fehler.

Um insgesamt Konvergenz zu erhalten, muss also das Verfahren so sein, dass

- lokal ein genügend kleiner Fehler entsteht (Konsistenz) und
- sich diese lokalen Fehler nur zu einem kleinen globalen Fehler aufsummieren (Stabilität)(Konsistenz allein reicht nicht).

Definition Konsistenz:

Ein Verfahren heißt konsistent, wenn der lokale Diskretisierungsfehler überall mindestens von der Ordnung h^2 ist, also

$$|y_1 - y(x_1)| = O(h^2)$$

Nur so ist für den globalen Fehler $O(h^2)n = O(h)$ erreichbar!
Denn es werden n Schritte benötigt von $a=x_0$ bis $b=x_n$.

Ist $|y_1 - y(x_1)| = O(h^{p+1})$ mit $p \geq 1$,

so heißt das Verfahren von der Ordnung p .

Offensichtlich ist das Eulerverfahren konsistent von Ordnung 1, da gilt

$$|y(x_1) - y_1| = |y(x_1) - y_0 - h\varphi(y_0, x_0)| = \frac{1}{2}h^2|y''(z)|$$

mit einer Zwischenstelle z .

Konsistenz sagt:

Gute Übereinstimmung der Näherungslösung für kleines h und in exakter Arithmetik.

Frage: Wie klein muss h sein, damit auch unter Berücksichtigung von Rundungsfehler die Näherung gut mit der exakten Lösung übereinstimmt.

Dazu definiert man den Begriff Stabilität.

Wir beschränken uns als Modellfall auf den ‚linearen‘

Spezialfall:

$$y' = \varphi(y,x) = \lambda y \quad \text{mit Lösung} \quad y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$$

7.1.10. Stabilität bei Diff'gleichungen im \mathbb{R}^n :



Problem: Divergenz bei zu großer Schrittweite h !

Wie groß kann man h wählen? Wie klein muss h sein?

Für die berechneten Näherungslösungen gilt beim Eulerver.
auf $y'(x) = \varphi(y, x) = \lambda y$ und $y(x_0) = y_0$

mit Lösung $y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$:

$$y_1 = y_0 + h\varphi(y_0, x_0) = (1 + h\lambda)y_0,$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_1 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0,$$

$$y_k = (1 + h\lambda)y_{k-1} = (1 + h\lambda)^k y_0.$$

Für $|1+h\lambda| > 1$ wird daher die Näherungslösung y_k immer größer.

Für $|1+h\lambda| < 1$ geht die Näherungslösung y_k gegen 0.
Stimmt dieses Verhalten mit der tatsächlichen Lösung überein?

Für die tatsächliche Lösung $y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$ gilt

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

Im Fall $\lambda > 0$ zeigen also exakte und Näherungslösung dasselbe Verhalten.

Kritisch ist der Fall $\lambda < 0$:

Die exakte Lösung geht gegen 0,
die Näherungslösung aber nur dann, wenn $|1+h\lambda| < 1$ gilt,
d.h. nur wenn $h < 2 / |\lambda|$

Dies ist die Stabilitätsbedingung, die garantiert, dass eine beschränkte exakte Lösung auch durch eine beschränkte Näherungslösung approximiert wird, und der globale Fehler nicht zu stark anwachsen kann.

Also ist für $\lambda < 0$ das Eulerverfahren nur konvergent, wenn die Schrittweite h so klein gewählt ist, dass $h < 2 / |\lambda|$ gilt !

Führen wir dieselbe Untersuchung für das implizite (Rückwärts) – Euler –Verfahren durch, so erhält man die Näherungslösungen von der Form

$$y_k = \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k}$$

Rückwärts-Euler:

$$y_1 = y_0 + h\lambda y_1 \Rightarrow (1-h\lambda)y_1 = y_0 \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1-h\lambda}$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1}{1-h\lambda} = \frac{y_0}{(1-h\lambda)^2}$$

$$y_k = \frac{y_0}{(1-h\lambda)^k}$$

Im kritischen Fall $\lambda < 0$ gilt hier unabhängig von h

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_0}{(1 - h\lambda)^k} = 0$$

Das implizite Eulerverfahren erfüllt für alle h die Stabilitätsbedingung, nämlich dass exakte und Näherungslösung für $\lambda < 0$ beschränkt bleiben!

Für $\lambda > 0$ muss auch wieder gelten $h < 2/\lambda$, damit y_k das richtige Verhalten im Unendlichen hat.

Ist aber nicht so kritisch, da e-Funktion mit großem λ praktisch selten vorkommt..

Beispiel 2-dim linear:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(x) \\ \lambda_2 y_2(x) \end{pmatrix}$$

Dies entspricht zwei unabhängigen Diff'gleichungen, die hier zusammen in vektorieller Form z.B. mittels Euler gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} y_1^{k+1} \\ y_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^k \\ \lambda_2 y_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + h\lambda_1) y_1^k \\ (1 + h\lambda_2) y_2^k \end{pmatrix}$$

Die Stabilitätsbedingung hängt hier also von beiden λ 's ab:

$$h < 2 / |\lambda_i| \quad \text{für } i=1,2$$

oder

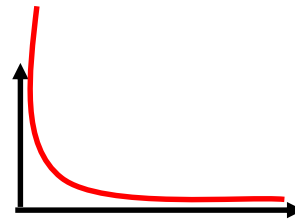
$$h < \min \{ 2 / |\lambda_1| , 2 / |\lambda_2| \}$$

Gilt nun $\lambda_2 \ll \lambda_1 < 0$, so wird die erlaubte Schrittweite h bestimmt von λ_2 , also

$$h < 2 / |\lambda_2| .$$

Andererseits ist die dazugehörige Komponente in der Lösung

$$\textit{const} \cdot \exp(\lambda_2 x)$$



schon nach wenigen Schritten verschwindend klein und spielt dann für die eigentliche Lösung keine Rolle mehr!

λ_2 bestimmt dann also die Lösung nur in einem kleinen Bereich, die Schrittweite h beim Eulerverfahren aber überall!

Man spricht hier von ‚steifen‘ Diff.-gleichungen.

Offensichtlich ist in solchen Fällen das implizite Eulerverfahren wesentlich besser geeignet, da es keine Einschränkung der Schrittweite h durch die $|\lambda_i|$ beinhaltet.

7.3. Partielle Differentialgleichungen

Beispiel Diffusion (mit Anwendung in der Bildverarbeitung):

Die Strömung j – hervorgerufen durch Dichteunterschiede – erfolgt in Richtung des negativen Gradienten der

Konzentration $u \rightarrow j(x, t) = -D \cdot \nabla u(x, t)$

Strömung: Wieviel Teilchen fließen pro Zeit durch Fläche.

Massenerhaltung: Zeitliche Änderung der Konzentration in einem Volumenelement kann nur durch örtliche Änderung der Strömung erfolgen (Fluss durch Fläche) \rightarrow

$$\text{In 1D} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\text{div}(j) = -\frac{\partial j_1}{\partial x_1} - \frac{\partial j_2}{\partial x_2} - \frac{\partial j_3}{\partial x_3}$$

Notation:

Nabla-Operator $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ ∂ für partielle, d für totale Ableitung.

Gradient $f(x, y, z): \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}: \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} =$
 $= f_x + g_y + h_z = \text{div}(F)$

Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad}(U)) = \nabla(\nabla U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} U + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$

$$j(x,t) = -D \cdot \nabla u(x,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -\text{div}(j)$$

Zusammen:

$$u_t = \text{div}(D \cdot \nabla u)$$

Im isotropen Fall ist D eine konstante Zahl, z.B. $D=1$:

$$u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

im zweidimensionalen Fall;

Δ heißt Laplace-Operator. 1D, 2D, 3D, ...

Einteilung Partieller Diff'gleichungen: $u(x,y,t)$



Gleichgewichtsgl. (elliptische PDE):

$$-\Delta u = f \quad \text{Zweite Ableitungen gleiches Vorzeichen.}$$

Wärmeleitungsgl. (parabolische PDE):

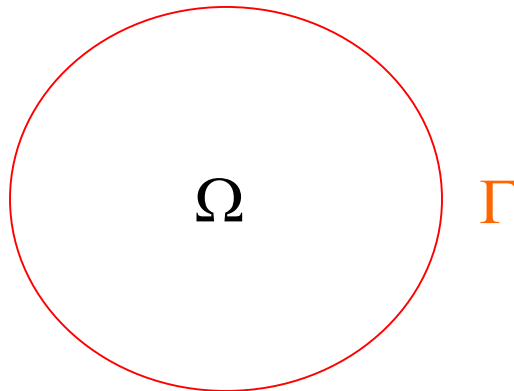
$$\Delta u = u_t \quad \text{Eine Variable nur erste Abl.}$$

Wellengleichung (hyperbolische PDE):

$$\Delta u = u_{tt} \quad \text{Eine Variable negative zweite Abl.}$$

Elliptische PDE: Gegeben sind zusätzlich Randwerte.

Also $-\Delta u = f$ auf Gebiet Ω und $u(x)$ auf Γ , dem Rand von Ω

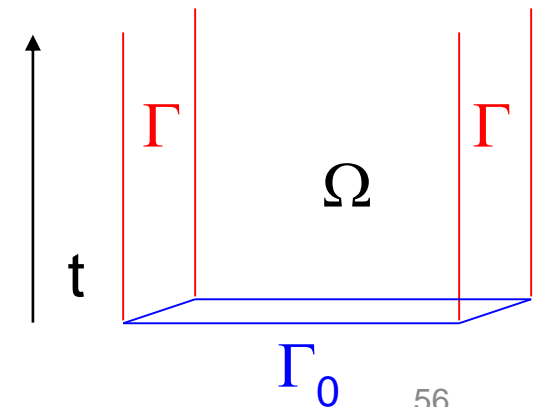


Beispiele:
stationäre Temperaturverteilung,
Ladungsverteilung, Potential.

Parabolische PDE: Gegeben sind Anfangs- und Randwerte.

Also $\Delta u = u_t$ auf Gebiet Ω und

$u(x,0)$ auf Γ_0 zum Zeitpunkt $t=0$,
und $u(x,t)$ vorgegeben auf Γ , dem
Rand von Ω .

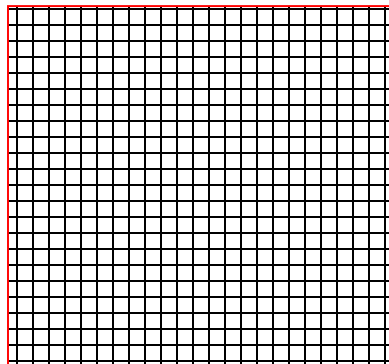


Lösungsmethoden am Beispiel Laplacegleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{auf Gebiet } \Omega \text{ und } u(x) \text{ auf } \Gamma$$

Differenzenverfahren:

Ersetze Differentialquotient durch Differenzenquotienten.
Das Gebiet Ω wird diskretisiert, d.h. durch ein Punktegitter x_{jk} , $j=1, \dots, n$, $k=1, \dots, m$, dargestellt:

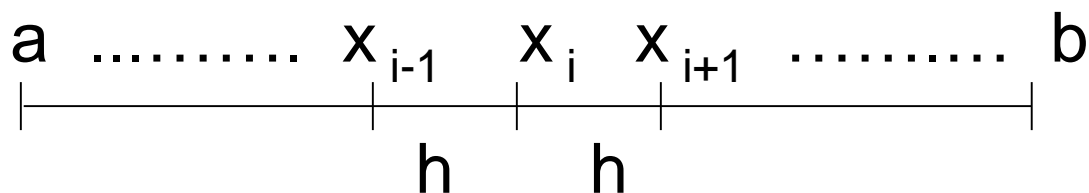


**$u(x) \rightarrow u_{jk} = u(x_{jk})$,
am einfachsten äquidistant mit
konstanter Schrittweite h .**

1-dimensionaler Fall:

$$-u_{xx} = f \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a)=v; \quad u(b)=w;$$



$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} = u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -f_i$$

ergibt lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u(a) \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u(b) \end{pmatrix}$$

Filter-Maske: $[-1 \quad 2 \quad -1]$

In 2D: -1

Maske: $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$ entspricht Differenzfilter

Zu Lösen: spezielles lineares Gleichungssystem!