Übungsaufgaben zu den mathematischen Grundlagen der numerischen Programmierung

1. Bestimmen Sie die Darstellung von $\frac{1}{10}$ im Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem auf 12, 4 bzw. 2 Stellen genau!

2. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gegeben mit $0 \neq |\varepsilon| \ll 1$. Seien zudem $\delta := \varepsilon + \varepsilon^2$ und $\gamma := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k$. Zeigen Sie

   (a) $|\frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon}| \ll 1$

   (b) $|\frac{\varepsilon - \gamma}{\varepsilon}| \ll 1$

3. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

   (a) $p(x) := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$

   (b) $f(x) := \sin^2(x)$

   (c) $g(x) := x \cdot \ln(x) - x$

   (d) $h(x) := \frac{e^x}{\cos(x)}$

4. Bestimmen Sie den Wert von

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{1 - e^x}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$

   (c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{1 - x}$

5. Bestimmen Sie den Wert von

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{4} k^k$

   (b) $\sum\limits_{k=0}^{20} q^k$

   (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$

   (d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

   (e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k$

   (f) $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k$

6. Seien p und q zwei durch

$$p(x) := \sum_{k=0}^{3} kx^k \quad \text{und} \quad q(x) := 1 - 2x + x^2$$

gegebene Polynome.

   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $r = p \cdot q$!

   (b) Bestimmen Sie die Koeffizienten von $r = p \cdot q$!

7. Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen, Extremwerte und Grenzwerte gegen $\pm\infty$ von

   (a) $f(x) := \sin(x)$

   (b) $g(x) := \tan(x)$

   (c) $h(x) := \exp(x)$

   (d) $y(x) := \ln(x)$

8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := (1 + x^2)^{-1}$.

   (a) Bestimmen Sie für $x_0 = 1$ die Tangentengerade an den Graphen von f im Punkt $(x_0; f(x_0))$!

   (b) Erklären Sie mit Hilfe der Tangentengerade aus (a) und eines Steigungsdreiecks im Punkt $(x_0; f(x_0))$ die Bedeutung des Vektors $(1; f'(x_0))$!

   (c) Welche Bedeutung haben anschaulich gesprochen der Betrag und das Vorzeichen von sowohl f' als auch f'' für den Verlauf des Graphen von f?

9. Der Mittelwertsatz für eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetig differenzierbare Funktion f besagt, dass ein $x_0 \in [a; b]$ existiert mit der Eigenschaft $f(b) = f(a) + f'(x_0) \cdot (b - a)$.

   (a) Zeigen sie damit, dass im Falle $f(a) = f(b)$ eine Zahl $x_0 \in [a; b]$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.

   (b) Was besagt der Mittelwertsatz anschaulich? Hinweis: Die Sekantensteigung zwischen a und b ist durch $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gegeben.

10. Bestimmen Sie mit der Regel von l'Hôpital den Wert von $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$!

11. Für zwei stetig differenzierbare Funktionen f und g mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ besagt die Regel von l'Hôpital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweisen Sie diese Gleichung mit Hilfe der Taylorentwicklungen von f und g um die Stelle x_0!

12. Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

der Funktion $f(x) = e^x$ um eine beliebige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$!

13. Zur Funktion $f(x) := e^x$ definieren wir das m-te Taylorpolynom T_m um die Stelle $x_0 = 0$ durch

$$T_m(x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \; .$$

Zudem gilt für alle $x \in [0; 1]$ die Gleichung

$$f(x) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot x^{m+1}$$

für ein $\xi \in [0; x]$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0; 1]$ die Ungleichung

$$|f(x) - T_m(x)| \leq \frac{e}{(m+1)!} x^{m+1}$$

erfüllt ist.

14. Bestimmen Sie die Stammfunktion von

    (a) $f(x) = \exp(x)$
    (b) $g(x) = \cos(x)$
    (c) $h(x) = \ln(x)$ (Hinweis: siehe Aufgabe 2)
    (d) $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$

15. Berechnen Sie die Integrale

    (a) $\int\limits_{-1}^{1} \sin(x) dx$
    (b) $\int\limits_{0}^{1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k dx$
    (c) $\int\limits_{0}^{1} x \cdot \sin(\pi x) dx$
    (d) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^3(x) \cdot \cos(x) dx$

16. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z = 1 + i$ und $w = -3 + 3i$.

    (a) Berechnen Sie $z \cdot \bar{z}$ und $z \cdot w$!

    (b) Wandeln Sie beide Zahlen in die Polarkoordinatendarstellung der Gestalt $x = r \cdot e^{i\varphi}$ um! Berechnen Sie dazu φ mittels der Cosinus-, Sinus- und Tangensfunktion!

    (c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser neuen Darstellung wiederum $z \cdot w$! Wandeln Sie zur Probe das Ergebnis wieder in kartesische Koordinaten (mit Real- und Imaginärteil) um!

17. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $i := \sqrt{-1}$

    (a) $\exp(\frac{i2\pi k}{4})$ für $k = 0; 1; \ldots; 4$

    (b) $\sum\limits_{k=0}^{3} i^k \cdot \exp(\frac{i2\pi k}{4})$

    (c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \exp(\frac{i2\pi k}{n})$

18. Seien

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

    (a) Berechnen Sie den Vektor $y = Ax$! Welche geometrische Wirkung hat die Anwendung der Matrix A auf den Vektor x?

    (b) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle(x, y)$ zwischen x und y mit Hilfe der Formel

$$\cos(\sphericalangle(x, y)) = \frac{x^T y}{||x||_2 ||y||_2}$$

    (c) Berechnen Sie $A^T A$ und A^{-1}!

19. Seien nun $\varphi \in [0; 2\pi]$, $x = 1 + i \in \mathbb{C}$ und $y = e^{i\varphi}$. Berechnen Sie $x \cdot y$! Welche geometrische Wirkung hat die Multiplikation mit y auf die komplexe Zahl x?

20. Berechnen Sie die euklidische Norm des Vektors $(1; 2; 3)^T$!

21. Welche Punktmengen sind durch die Bedingungen

    (a) $|x| = 1$ und $x \in \mathbb{N}$

    (b) $|x| = 1$ und $x \in \mathbb{R}$

    (c) $||x||_2 < 1$ und $x \in \mathbb{R}^2$

    (d) $||x||_2 < 1$ und $x \in \mathbb{R}^3$

    (e) $|z| < 1$ und $z \in \mathbb{C}$

    beschrieben?

22. Seien $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ zwei verschiedene Normen des $\mathbb{R}^n$. Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung

   (a) $||\cdot||_1 + ||\cdot||_2$ ist ebenfalls eine Norm.

   (b) $||\cdot||_1 \ \cdot \ ||\cdot||_2$ ist ebenfalls eine Norm.

23. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für

   (a) $b = (4; 2; 0)^T$

   (b) $b = (-1; 1; 1)^T$

   (c) $b = (0; 0; 0)^T$

   Bestimmen Sie Rang und Determinante von A! Seien weiterhin

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

   Berechnen Sie $D := C \cdot A \cdot B$! Welchen Rang haben B, C und D?

24. Bestimmen Sie das Zahlentripel $(a; b; c)$, das die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

   löst!

25. Sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben, dann bezeichnet man einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{O}\}$ als Eigenvektor von A, wenn eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $Ax = \lambda x$ gilt.

   (a) Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

   (b) Sei für $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$U := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

   gegeben (vgl. Aufgabe 18). Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A := U^T D U$. Hinweis: Führen Sie das Problem auf (a) zurück!

   (c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} D^k$ und $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$!

26. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Gradientenvektoren $\nabla f_1(x,y)$ und $\nabla f_2(x,y)$ der ersten Ableitungen von f_1 bzw. f_2 an der Stelle $(x,y)^T$! Geben Sie zudem die Jacobi-Matrix $J_F(x,y)$ von F an der Stelle $(x,y)^T$ an!

27. Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, so dass gilt

$$F(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_F(x,y)$ der ersten Ableitungen von F an der Stelle $(x,y)^T$!

28. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := x^2 + 2xy + y^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, so dass gilt

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

(b) Berechnen Sie den Gradientenvektor $\nabla f(x,y)$ der ersten Ableitungen von f an der Stelle $(x,y)^T$!

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ der zweiten Ableitungen von f an der Stelle $(x,y)^T$!

(d) Als Höhenlinien von f bezeichnet man Kurven in der x,y - Ebene, auf denen der Funktionswert von f konstant ist. Suchen Sie für ein allgemeines $c > 0$ alle Kombinationen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt $f(x,y) = c$! Hinweis: Bestimmen Sie y in Abhängigkeit von x und c!