Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Dipl.-Tech. Math. Tobias Neckel

WS 2008/2009

Numerisches Programmieren, Übungen

2. Übungsblatt: Kondition, Stabilität und Interpolation

1) Kondition, Stabilität

Die (relative) Konditionszahl $cond(f,x)$ für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert:

$$cond(f,x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

i) Berechnen Sie die relative Konditionszahl der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von x:

a) $f_1(x) = a \cdot x$, b) $f_2(x) = a - x$, c) $f_3(x) = 3e^x - 3$.

Interpretieren Sie jeweils das Ergebnis!

Wie lautet die Konditionszahl von f_3 an der Stelle $x = 0$ (Grenzwertbetrachtung!)?

ii) Ist eine computergestützte Auswertung von f_3 stabil?

(Hinweis: Betrachten Sie den relativen Fehler $\left| \frac{rd(f(x))-f(x)}{f(x)} \right|$.)

2) Ableitungsapproximation

Die erste Ableitung einer Funktion f an einem Punkt x_0 ist definiert durch

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

und kann durch den rechtsseitigen Differenzenquotienten

$$D_f(x_0,h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

für kleine positive Werte von h numerisch approximiert werden. Dies geschieht auch oft in praktischen Anwendungen, in denen es nicht möglich oder zu aufwändig ist, die Ableitung auf analytischem Weg zu bestimmen. Dabei stellt sich die Frage, wie man die sogenannte Schrittweite h wählt. Wählt man sie zu groß, dann ist der Differenzenquotient aus analytischen Gründen keine gute Näherung für die Ableitung. Wählt man andererseits h zu klein, so gilt $f(x_0+h) \approx f(x_0)$, und bei der Auswertung von Formel (1) tritt **Auslöschung** auf.

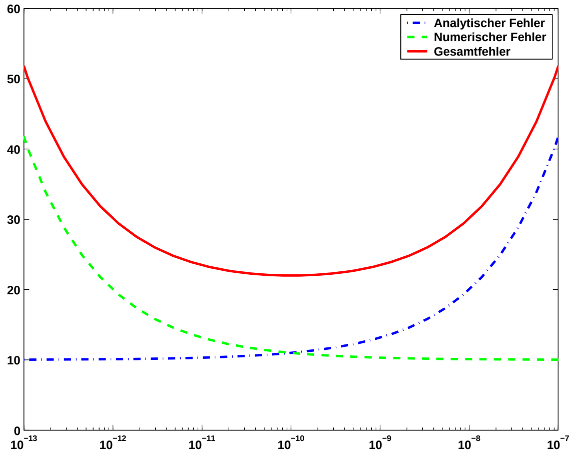

Abbildung 1: Fehlerquellen bei der Ableitungsapproximation

i) Leiten Sie mit Hilfe der Taylorformel

$$f(x_0+h) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2!}f''(z)\cdot h^2, \quad z \in (x_0; x_0+h)$$

eine obere Schranke (abhängig von der Maschinengenauigkeit ε_{Ma}) für den absoluten Fehler $err_{abs} = |f'(x_0) - rd\big(D_f(x_0,h)\big)|$ her. Berücksichtigen Sie dabei sowohl Rundungsfehler in den Eingabedaten $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ als auch bei der Berechnung von $D_f(x_0,h)$.

ii) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe i), um in Abhängigkeit von ε_{Ma} anzugeben, wie eine optimale Schrittweite h zu wählen ist, so dass der absolute Fehler err_{abs} minimiert wird.

3) Interpolation mit Polynomen

i) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_1(x)$ nach Lagrange, das genau durch die Punkte $P_0 = (-1,0)$, $P_1 = (0,-1)$ und $P_2 = (1,0)$ verläuft!

ii) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_2(x)$ nach Lagrange, das genau durch die Punkte $P_0 = (-1,-3)$, $P_1 = (1,1)$ und $P_2 = (3,-3)$ verläuft!

iii) Stellen Sie das Horner-Schema für $p(x) = 5x^4 - 2x^3 + x - 10$ auf! Was ist der Vorteil des Horner-Schemas im Vergleich zur normalen Polynomauswertung?