Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Dipl.-Tech. Math. Tobias Neckel

WS 2008/2009

Numerisches Programmieren, Übungen

4. Übungsblatt: Stückweise Interpolation

1) Hermite-Interpolation

Ziel der Interpolation nach Hermite ist es, eine Funktion $p(x)$ zu erhalten, die überall stetig differenzierbar ist ($p \in \mathcal{C}^1$ = keine Knicke). Um dies zu erreichen, müssen zusätzlich zu Stützpunkten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ auch noch die Werte der ersten Ableitung $y'_0, \ldots, y'_n$ an den Stützstellen vorgegeben werden. Damit ist es möglich, für $p(x)$ auf jedem Teilintervall $[x_i; x_{i+1}],\ i = 0, \ldots, n-1$, ein kubisches Polynom zu erzeugen und diese Einzeldarstellungen stetig differenzierbar an den x_i zu „verkleben".

i) Betrachten Sie den einfachen Fall nur eines Teilintervalls mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zusätzlich zu den Funktionswerten y_0, y_1 seien auch die ersten Ableitungen y'_0, y'_1 bei x_0 und x_1 gegeben.
Bestimmen Sie das kubische Polynom $p(x)$, das durch die Vorgabe dieser Werte

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1 \tag{1}$$
$$p'(x_0) = y'_0, \quad p'(x_1) = y'_1 \tag{2}$$

festgelegt ist! Nützen Sie hierfür den allgemeinen Ansatz für kubische Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [0; 1] = [x_0; x_1].$$

Bestimmen Sie anschließend mittels Koeffizientenvergleich die kubischen Basispolynome $H_0, \ldots, H_3$ des Hermite-Ansatzes

$$p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y'_0 \cdot H_2(t) + y'_1 \cdot H_3(t), \quad t \in [0; 1] = [x_0; x_1].$$

ii) Um die stückweise Hermite-Interpolation durchführen zu können, muss der Spezialfall $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ von Teilaufgabe i) auf ein beliebiges Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ übertragen werden. Geben Sie dazu zuerst die passenden vier Bedingungen für das lokale kubische Polynom an!
Überlegen Sie dann, wie mit Hilfe einer Transformationsfunktion $t_i(x)$ sowie der bereits in i) berechneten Basispolynome $H_0(t)$ bis $H_3(t)$ eine passende Interpolationsfunktion $p_i(t_i(x))$ auf dem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ konstruiert werden kann! Insgesamt gilt dann:

$$p(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} \quad = \quad p_i(t_i(x)).$$

2) Interpolation mit kubischen Splines

Bei der kubischen Spline-Interpolation möchte man eine interpolierende Funktion $s(x)$ erhalten, die ähnlich wie bei der Hermite-Interpolation aus kubischen Teilpolynomen $p_i(x)$ auf den Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ besteht. Allerdings soll die Splinefunktion $s(x)$ überall zweimal stetig differenzierbar sein ($s \in \mathcal{C}^2$) und dafür keine anderen Informationen benötigen als die $n+1$ zu interpolierenden Stützpunkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

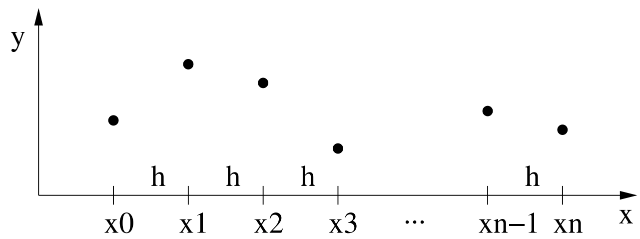

Abbildung 1: Visualisierung der äquidistanten Stützstellen x_i.

In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf den Fall äquidistanter Stützstellen x_i, d.h. alle Teilintervalle haben dieselbe Länge (vgl. Abb. 1):

$$x_{i+1} - x_i \quad = \quad h \; := \; \frac{x_n - x_0}{n}, \; i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

i) Geben Sie die Bedingungen an, die aus der Interpolation und der $\mathcal{C}^2$-Stetigkeit resultieren!

ii) Berechnen Sie die zweiten Ableitungen $H_i''(t), i = 0, \ldots, 3$, der Hermite-Basispolynome $H_i(t)$ aus Aufgabe 1) und werten Sie sie an den Stellen $t = 0$ und $t = 1$ aus!

iii) Zeigen Sie, dass $s(x)$ mit Hilfe der Stützwerte y_i und folgendem linearen Gleichungssystem konstruiert werden kann:

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \frac{3}{h^2}\begin{pmatrix} y_2 - y_0 - \frac{h}{3}y_0' \\ y_3 - y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_{n-3} \\ y_n - y_{n-2} - \frac{h}{3}y_n' \end{pmatrix}.$$

iv) Bestimmen Sie die Spline-Funktion $s(x)$ für die Stützpunkte

$$P_0 = (-1, 2),\ P_1 = (0, 0),\ P_2 = (1, 2),\ P_3 = (2, 3)$$

und die Randbedingungen

$$s'(-1) = 9,\ s'(2) = 0.$$