

Numerisches Programmieren, Übungen

6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen (Polynome) per Hand und mit den Formeln der Trapezregel und Trapezsumme aus der Vorlesung integrieren. Ziel der Berechnungen ist also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

sowie die approximativen Werte $Q_T(f)$ und $Q_{TS}(f; h)$,

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2)$$

$$Q_{TS}(f; h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \quad (3)$$

wobei gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \dots, n$ bei n Teilintervallen.

- i) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_T(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2$, $b = 2$.
- ii) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_T(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0$, $b = 4$.
- iii) Berechnen Sie $Q_{TS}(f; h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2$, $b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$! Geben Sie dann das Restglied $R_{TS}(f; h)$ an nach der Formel

$$R_{TS}(f; h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12}. \quad (4)$$

- iv) Berechnen Sie $Q_{TS}(g; h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0$, $b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{TS}(g; h)$ mit der Formel (4) ab!

2) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 1) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_F(g)$ und $Q_{SS}(g; h)$ der Fassregel und der Simpson-Summe:

$$Q_F(g) = H \cdot \frac{g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)}{6} \quad (5)$$

$$Q_{SS}(g; h) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n), \quad (6)$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \dots, n$ bei n Teilintervallen.

- i) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_F(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0$, $b = 4$.
- ii) Berechnen Sie $Q_{SS}(g; h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0$, $b = 4$ und $n = 4$.
Schätzen Sie dann das Restglied $R_{SS}(g; h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{SS}(g; h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180}. \quad (7)$$

3) Quadratur nach Archimedes

Wir betrachten den divide-et-impera-Algorithmus zur Integration nach Archimedes. Die Grundidee ist dabei eine hierarchische Sichtweise, so dass in jedem neuen Schritt des Algorithmus jeweils ein zusätzlicher Anteil zum Gesamtergebnis hinzukommt. Das hat zur Folge, dass bei eventueller adaptiver Rechnung nie die vorigen Ergebnisse weggeworfen sondern mitgenutzt werden.

Konkret berechnet dieser Algorithmus immer Dreiecksflächen, die dann aufsummiert werden und so eine Approximation der gesamten Fläche unter dem Funktionsgraphen ergeben (vgl. Abb. 1). Die Fläche eines Dreiecks ist nach der Formel $A = g \cdot h/2$ bestimmt, wobei g die Grundseite (in Abb. 1 vertikal) und h die Höhe (horizontal) beschreibt.

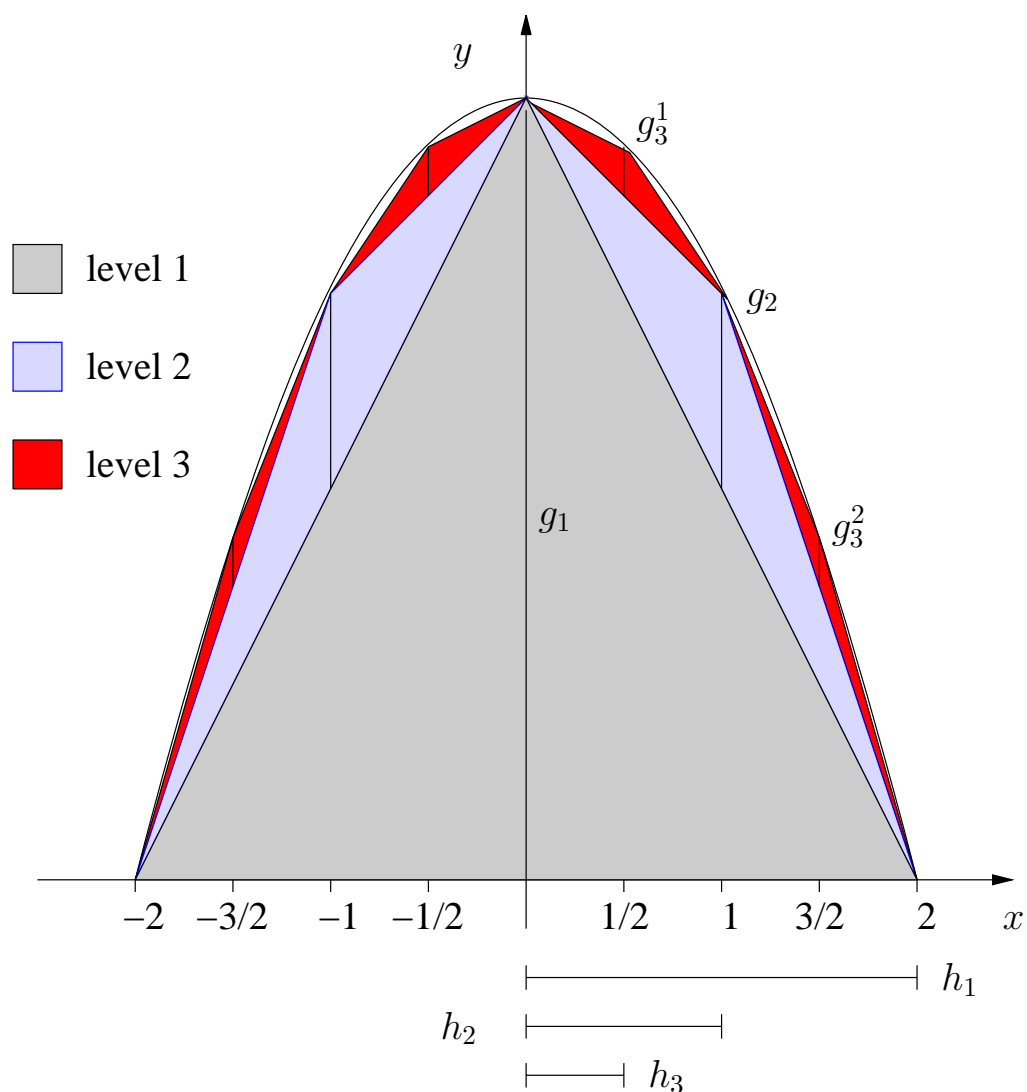


Abbildung 1: Visualisierung des Algorithmus nach Archimedes.

Berechnen Sie nach Archimedes eine Approximation des Integrals

$$I(f) = \int_{-2}^2 f(x) dx,$$

für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$, indem Sie ausgehend vom Startdreieck zwei gleichmäßige Verfeinerungsstufen ansetzen (vgl. Abb. 1). Tip: Nützen Sie die Achsensymmetrie der Funktion $f(x)$ aus!

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1) iii). Was stellen Sie fest?