Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Dipl.-Tech. Math. Tobias Neckel

WS 2008/2009

Numerisches Programmieren, Übungen

7. Übungsblatt: Extrapolation, Gauß-Elimination

1) Extrapolation: Numerische Quadratur hoher Ordnung

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit der Romberg-Quadratur beschäftigen. Dieses Verfahren benutzt Trapezsummen $T(h_1)$, $T(h_2)$, $T(h_3)$, $\ldots$ zu feiner werdenden Schrittweiten h_1, h_2, h_3, $\ldots$, um daraus ein Interpolationspolynom $p(x)$ in $x = h^2$ durch die Stützpunkte $(h_1^2, T(h_1))$, $(h_2^2, T(h_2))$, $(h_3^2, T(h_3))$, $\ldots$ zu konstruieren und dieses bei $x = h^2 = 0$ auszuwerten. Da dieser Wert außerhalb des Bereichs der Stützstellen liegt, wird es auch als *Extrapolationsverfahren* bezeichnet. Der Fehler der Romberg-Quadratur ist von der Größenordnung $O(h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot \ldots)$.

Das Interpolationspolynom lässt sich an der Stelle $x = 0$ mit Hilfe des Aitken-Neville-Algorithmus auswerten. Modifziert man das Aitken-Neville-Verfahren entsprechend, so erhält man den Romberg-Algorithmus:

```
for i=1:n
    waehle n[i];
    h[i]:=(b-a)/n[i];
    T[i]:=Trapezsumme zur Schrittweite h[i]
    for k:=i-1:-1:1
        T[k] := T[k+1] + 1/(h[k]^2/h[i]^2-1)*(T[k+1]-T[k])
    end
end
```

Dabei bezeichnet n_i die Anzahl der Teilintervalle von $[a, b]$, die zur Berechnung der Trapezsumme T_i mit Schrittweite $h_i = \frac{b-a}{n_i}$ verwendet wird. Häufig wählt man hierfür die Folge $(n_i)_{i\in\mathrm{N}}$ mit $n_i = 2^i$.

i) Leiten Sie einen Extrapolationsschritt zur Berechnung eines Integrals $I(f)$ her. Betrachten Sie dazu die Entwicklungen (in h^2) zweier Trapezsummen mit den Schrittweiten h_1 und h_2

$$\begin{aligned} T(h_1) &= I(f) + \tau_1 h_1^2 + \tau_2 h_1^4 + \dots \\ T(h_2) &= I(f) + \tau_1 h_2^2 + \tau_2 h_2^4 + \dots \end{aligned}$$

und ermitteln Sie daraus eine Approximation für den Wert des Integrals $I(f)$ abhängig von den Trapezsummen $T(h_1)$ und $T(h_2)$. Von welcher Größenordnung ist der Fehler?

ii) Berechnen Sie den Extrapolationswert $p(0)$ für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ auf dem Intervall $[a; b]$, $a = -2,\ b = 2$, mit den drei Schrittweiten $h_1 = b - a$, $h_2 = (b - a)/2$, $h_3 = (b - a)/4$.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der nächst feineren Trapezsumme ($h_4 = (b - a)/8$) aus Aufgabe 1 iii) von Blatt 6 und bestimmen Sie den Aufwand an jeweils nötigen f-Auswertungen. Was stellen Sie fest?

2) Gauß-Elimination

i) Berechnen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

iii) Berechnen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$