Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Dipl.-Tech. Math. Tobias Neckel

WS 2008/2009

Numerisches Programmieren, Übungen

9. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

1) Kondition von Anfangswertproblemen

Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ der beiden folgenden Anfangswertprobleme (AWP) mit Hilfe der Separation der Variablen und diskutieren Sie jeweils die Kondition:

i) $\dot{y}(t) = 2y(t), \quad y(0) = y_0,\ t \geq 0,$

ii) $\dot{y}(t) = -2y(t),\ y(0) = y_0,\ t \geq 0.$

2) Einschrittverfahren

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(a) &= 1, \end{aligned}$$

wobei $f(t, y(t)) = t \cdot y(t)$ und $t \in [a = 0; b]$.

i) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

ii) Berechnen Sie im Intervall $[0; 4]$ numerische Lösungswerte y_k, welche die Lösung $y(t)$ in den Stellen t_k approximieren, d.h. $y_k \approx y(t_k)$. Rechnen Sie mit Schrittweite $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$ und verwenden Sie die folgenden Verfahren:

a) **Explizites Euler-Verfahren**:

Bei diesem Verfahren wird lediglich die Steigung im aktuellen Punkt t_k zur Berechnung der numerischen Lösung betrachtet:

$$\begin{aligned} t_k &= a + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k); \end{aligned}$$

b) **Verfahren von Heun**:

Analog zur Trapezregel bei der Quadratur wird bei diesem Verfahren im Vergleich zum Euler-Verfahren ein zweiter f-Wert zur numerischen Berechnung der Steigung hinzugezogen:

$$\begin{aligned} t_k &= a + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k))\right); \end{aligned}$$

c) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren**:

Analog zur Fassregel werden hier Zwischenwerte T_i für die Näherung der Steigung berechnet und mit 1/6 gewichtet:

$$\begin{aligned} t_k &= a + k \cdot \delta t; \\ T_1 &= f(t_k,\ y_k); \\ T_2 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_1); \\ T_3 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_2); \\ T_4 &= f(t_{k+1},\ y_k + \delta t T_3); \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{6} \cdot (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4); \end{aligned}$$

Vergleichen Sie anschließend die Ergebnisse mit den Werten der analytischen Lösung! Berechnen Sie hierzu für jedes Verfahren den globalen Diskretisierungsfehler

$$e(\delta t) := \max_{k \in \{1,\ldots,N\}} \{|y_k - y(t_k)|\}$$

nach 2 bzw. 4 Zeitschritten.

3) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Gegeben sei das folgende AWP:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -(y(t))^2 \qquad \forall\, t \geq 1, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dabei ist bekannt, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 1$ gilt.

i) Lösen Sie das AWP analytisch mit Hilfe der Separation der Variablen!

ii) Sei y_k die numerische Approximation von $y(t_k)$. Wenden Sie das implizite Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler) an, um eine Näherungslösung $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ zum Zeitpunkt $t_{k+1} = t_k + h$ zu bestimmen.
Führen Sie einen Schritt des impliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ durch, um eine Näherungslösung y_1 des AWPs zum Zeitpunkt $t = 1.25$ zu finden. Beachten Sie dabei, dass $y(t) > 0$ gilt!