Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Tech. Math. Stefanie Schraufstetter
Dipl.-Tech. Math. Tobias Neckel

WS 2008/2009

Numerisches Programmieren, Übungen

10. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE) II

1) Begriffe

Was versteht man unter den folgenden Begriffen:

i) lokaler Diskretisierungsfehler,

ii) globaler Diskretisierungsfehler,

iii) Konvergenz,

iv) Konsistenz,

v) Stabilität,

vi) Steifheit?

Machen Sie sich insbesondere den Unterschied zwischen lokalem und globalem Diskretisierungsfehler klar. Nutzen Sie hierfür eine Skizze!

2) Quadratur und AWP-Lösung

In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal die Analogie von Quadratur und numerischer Lösung von Anfangswertproblemen (AWP) verdeutlichen. Wie in der Vorlesung definieren wir ein AWP durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (1) und einen Anfangswert (2)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

$$y(a) = y_0. \tag{2}$$

Ziel ist die Approximation y_i der zugehörigen Lösungsfunktion $y(t_i)$ zu bestimmten Zeitpunkten t_i. Wenn wir **Ein**schrittverfahren verwenden, interessiert uns immer ein Teilintervall $[t_k; t_{k+1}]$, um aus **einem** alten Wert y_k den neuen y_{k+1} zu berechnen. Dabei können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzen, der uns folgenden Zusammenhang liefert:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)\ dt \overset{(1)}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\ dt\ . \tag{3}$$

Um nun approximierte Werte y_k und y_{k+1} auf der linken Seite von (3) zu erhalten, integriert man die rechte Seite numerisch.

i) Benutzen Sie die im Folgenden definierte "dumme Rechtecksregel", um aus (3) das explizite Euler-Verfahren herzuleiten!
Die "dumme Rechtecksregel" arbeitet wie die normale Rechtecksregel, nur wird die Funktion am linken Rand des Intervalls ausgewertet und nicht in der Mitte:

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \approx \quad (b-a)\cdot f(a)\;.$$

ii) Benutzen Sie die Trapezregel sowie einen zusätzlichen Approximationsschritt, um aus (3) das Verfahren von Heun herzuleiten!

3) Euler-Verfahren und Zinsberechnung

Die Verzinsung eines Guthabens, das am Anfang den Wert y_0 habe und pro Jahr $p\%$ Zinsen erhält, kann man als Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens auf ein Anfangswertproblem $\dot{y} = f(y)$ interpretieren.

i) Wiederholung: Wie sieht die Berechnungsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite δt für das AWP $\dot{y} = f(y)$ aus?

ii) Die Diga-Bank schüttet Zinsen immer zum Jahresende aus. Geben Sie die rechte Seite $f(y)$ an, so dass das Eulerverfahren mit δt=1 (Jahr) gerade diese Verzinsung beschreibt.

iii) Berechnen Sie die analytische Lösung des AWPs!

iv) Nun macht die Spaßkasse das Angebot, Zinsausschüttungen vierteljährlich statt nur am Ende des Jahres durchzuführen. Geben Sie die Euler-Formel für diese neue Schrittweite an und berechnen Sie daraus eine explizite Vorschrift, um direkt den Wert des Gesamtguthabens nach einem vollen Jahr (y_{end}) zu ermitteln.

v) Vergleichen Sie für den konkreten Fall eines Startguthabens von y_0 =100000 Euro und einer Verzinsung von $p = 2$ Prozent p.a. die verschiedenen Guthaben y_{end} nach einem Jahr bei der Diga-Bank, der Spaßkasse und einer virtuellen Bank mit Verzinsung nach der analytischen Lösung des AWPs! Was stellen Sie fest?

4) Instabilität der Mittelpunktsregel

Neben den bisher betrachteten Einschrittverfahren gibt es eine weitere Klasse der sogenannten Mehrschrittverfahren. Deren Grundidee ist, die in früheren als dem letzten Schritt bereits berechneten Approximationen nicht wegzuwerfen sondern mitzunutzen.
Ein einfacher Vertreter der Mehrschrittverfahren ist die Mittelpunktsregel (MPR). Die MPR ist ein Zweischrittverfahren der folgenden Form:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k), \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

Damit ein Mehrschrittverfahren konvergiert, ist zusätzlich zur Konsistenz nun auch eine Stabilitätsbedingung notwendig. Wir wollen in dieser Aufgabe an der MPR beobachten, was passiert, wenn diese Stabilität verletzt wird.

Dazu betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Zu Beginn des Verfahrens liegt nur der Anfangswert y_0 vor. Somit benötigen wir noch einen weiteren Wert y_1, bevor die Mittelpunktsregel gestartet werden kann. Typischerweise benutzt man zur Erzeugung dieses Wertes einfache Einschrittverfahren. Im Folgenden wollen wir daher y_1 mit Hilfe eines Schrittes des expliziten Euler-Verfahrens berechnen.

i) Berechnen Sie die analytische Lösung des AWPs (4)!

ii) Wenden Sie die Mittelpunktsregel für $t \in [0; 6]$, $N = 3$ und $\delta t = 2$ auf das AWP (4) an! Was stellen Sie im Vergleich mit der analytischen Lösung fest?

iii) Berechnen Sie nun die Ergebnisse mit halber Schrittweite ($N = 6$ und $\delta t = 1$) und vergleichen Sie sie wieder mit der analytischen Lösung!
Testen Sie mit Hilfe des matlab-Skriptes *vis_midpoint.m*, ob sich die Beobachtungen auch für weitere Verfeinerungen des Gitters bestätigen.