Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Michael Lieb, M. Sc.
Dipl.-Inf. Gerrit Buse

WS 2009/2010

Numerisches Programmieren, Übungen

5. Übungsblatt: Diskrete Fourier-Transformation, FFT

1) Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation (DFT)

Wie in der Vorlesung ist die diskrete Fourier-Transformation von komplexen Eingabedaten $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})^T$ definiert als

$$c_k \quad = \quad \big(DFT(v)\big)_k \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1}$$

mit $\omega = \exp(i\,\frac{2\pi}{n})$.

Analog ist die inverse diskrete Fourier-Transformation als Auswertung des trigonometrischen Interpolationspolynoms an den Interpolationspunkten definiert:

$$v_l \quad = \quad \big(IDFT(c)\big)_l \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{kl} \qquad\qquad l = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

i) Zeigen Sie, dass gilt: $DFT(v) = \frac{1}{n}\,\overline{IDFT(\bar{v})}$.

ii) Zeigen Sie, dass gilt: $DFT(v + u) = DFT(v) + DFT(u)$.

iii) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen in Bezug auf ω gelten:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega}^{kl} \quad = \quad \begin{cases} n, & \text{für } l = 0 \\ 0, & \text{für } l = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kl}\, \overline{\omega}^{kj} \quad = \quad \begin{cases} n, & \text{für } l = j \\ 0, & \text{für } l \neq j \end{cases} \quad .$$

iv) Zeigen Sie, dass DFT und $IDFT$ tatsächlich Umkehroperationen sind, indem Sie mit Hilfe der Definitionen (1) und (2) nachweisen:

$$IDFT(DFT(v))_l = v_l$$

v) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation DFT für folgende drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{C}^n$!
$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)^T$,
$b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})^T = (i, i, i, \ldots, i, i)^T$,
$c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})^T = (1, -1, 1, -1, \ldots)^T$ für gerades n!

2) Frequenzanalyse

Eine von vielen Anwendungen der DFT ist die Transformation eines diskreten Signals $s \in \mathbb{C}^n$ aus dem Wertebereich in den Spektralbereich. Mathematisch kann man das auch als Übergang von der normalen Basis B des $\mathbb{C}^n$ zu einer alternativen Basis $\widetilde{B} = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ betrachten. Die neuen Basisvektoren von $\widetilde{B}$ sind

$$b_l = \begin{pmatrix} \exp(i\,\frac{0\pi l}{n}) \\ \exp(i\,\frac{2\pi l}{n}) \\ \vdots \\ \exp(i\,\frac{2(n-1)\pi l}{n}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad l = 0, \ldots, n-1\ . \tag{3}$$

Die Basisvektoren b_l aus (3) sind diskrete Varianten von (komplexwertigen) Schwingungen mit Frequenz l. Man kann folgende Gleichheit herleiten:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \big(DFT(s)\big)_l \cdot b_l = s\ .$$

Das bedeutet, dass die DFT die Koeffizienten des Vektors s bezüglich der Basis $\widetilde{B}$ liefert. Somit beschreibt die DFT, wie sich das Signal s durch Linearkombination der Schwingungen $b_0, \ldots, b_{n-1}$ zusammensetzen lässt. Dabei geben die Beträge der Komponenten der DFT den Anteil der jeweiligen Schwingung an.

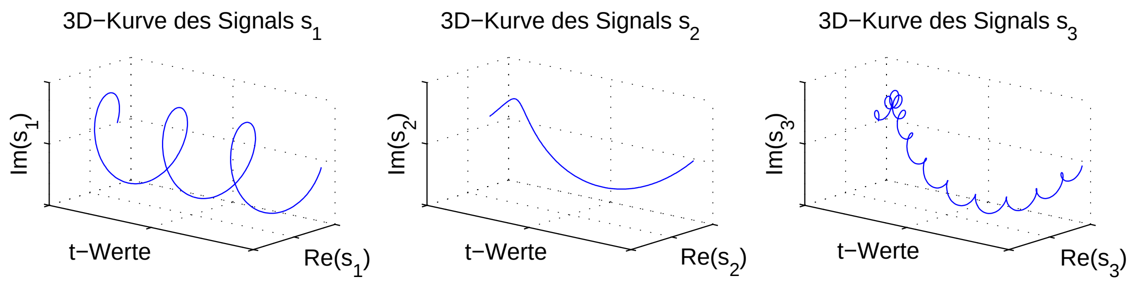

Abbildung 1: Komplexe Signale

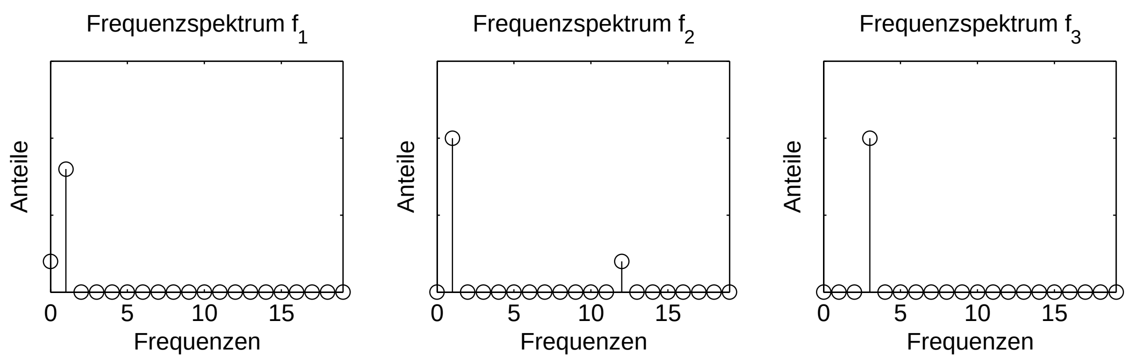

Abbildung 2: Frequenzspektren

Ordnen Sie anhand dieser Information den Signalen s_1 bis s_3 (Abb. 1) die Frequenzspektren f_1 bis f_3 (Abb. 2) zu! Dabei sind die Signale zum besseren Verständnis kontinuierlich dargestellt (z.B. $s_1 = exp(3it),\ t \in [0; 2\pi]$), wohingegen die Frequenzspektren den Betrag der (komplexen) Koeffizienten der DFT mit $n = 21$ gesampelten Werten des jeweiligen Signals beschreiben.

3) Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

In dieser Aufgabe wollen wir die schnelle Fouriertransformation (FFT) im Detail nachvollziehen und mit der direkten Formel der inversen diskreten Fourier-Transformation ($IDFT$) vergleichen. Der rekursive FFT-Algorithmus lautet:

```
FUNCTION [v[0],...,v[n-1]]=IDFT(c[0],...,c[n-1],n)
if n==1
   v[0] = c[0];
else
   m = n/2;
   z1 =IDFT(c[0],c[2],...,c[n-2],n/2);
   z2 = IDFT(c[1],c[3],...,c[n-1],n/2);
   omega = exp(2*pi*i/n);
   for j=0,...,m-1
      v[j]    = z1[j] + omega^j * z2[j];
      v[m+j]  = z1[j] - omega^j * z2[j];
   end
end
return;
```

Der Algorithmus kann wie in der Vorlesung durch eine Sortierphase und eine Kombinationsphase (sukzessive Anwendung des Butterfly-Operators) visualisiert werden (vgl. Abb. 3 und Abb. 4).

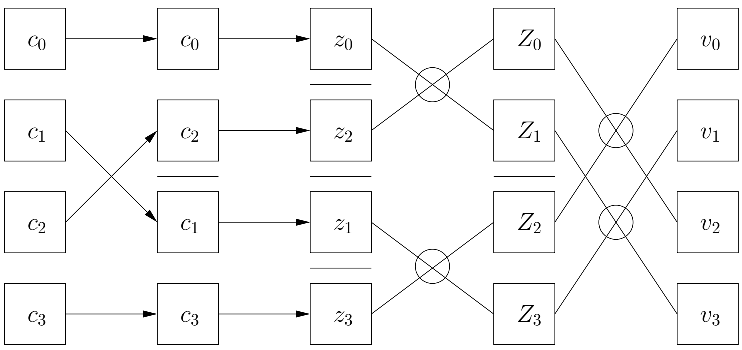

Abbildung 3: Schematischer Ablauf des FFT-Algorithmus.

Der Einfachheit halber soll nun $n = 4$ sein, d.h. wir wollen mit der $IDFT$ aus den vier Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 die zugehörigen vier Funktionswerte v_0, v_1, v_2, v_3 berechnen.

Die direkte Formel dazu lautet ja

$$v_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \omega^{jk}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{4}$$

i) Berechnen Sie die v_j zunächst nach der direkten Formel (4)!

ii) Verwenden Sie nun den FFT-Algorithmus, um zu zeigen, dass man damit tatsächlich dasselbe Ergebnis wie in i) erhält!

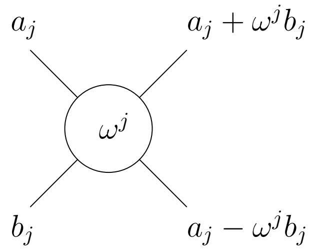

Abbildung 4: Der Butterfly-Operator.