Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Michael Lieb, M. Sc.
Dipl.-Inf. Gerrit Buse

WS 2009/2010

Numerisches Programmieren, Übungen

7. Übungsblatt: Extrapolation, Gauß-Quadratur, Quadratur nach Archimedes

1) Extrapolation: Numerische Quadratur hoher Ordnung

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit der Romberg-Quadratur beschäftigen. Dieses Verfahren benutzt Trapezsummen $T(h_1)$, $T(h_2)$, $T(h_3)$, ... zu feiner werdenden Schrittweiten h_1, h_2, $h_3, \ldots$, um daraus ein Interpolationspolynom $p(x)$ in $x = h^2$ durch die Stützpunkte $(h_1^2, T(h_1))$, $(h_2^2, T(h_2))$, $(h_3^2, T(h_3))$, ... zu konstruieren und dieses bei $x = h^2 = 0$ auszuwerten. Da dieser Wert außerhalb des Bereichs der Stützstellen liegt, wird es auch als *Extrapolationsverfahren* bezeichnet. Der Fehler der Romberg-Quadratur ist von der Größenordnung $O(h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot \ldots)$.

Das Interpolationspolynom lässt sich an der Stelle $x = 0$ mit Hilfe des Aitken-Neville-Algorithmus auswerten. Modifziert man das Aitken-Neville-Verfahren entsprechend, so erhält man den Romberg-Algorithmus:

```
for i=1:n
    waehle n[i];
    h[i]:=(b-a)/n[i];
    T[i]:=Trapezsumme zur Schrittweite h[i]
    for k:=i-1:-1:1
        T[k] := T[k+1] + 1/(h[k]^2/h[i]^2-1)*(T[k+1]-T[k])
    end
end
```

Dabei bezeichnet n_i die Anzahl der Teilintervalle von $[a, b]$, die zur Berechnung der Trapezsumme T_i mit Schrittweite $h_i = \frac{b-a}{n_i}$ verwendet wird. Häufig wählt man hierfür die Folge $(n_i)_{i \in \mathrm{N}}$ mit $n_i = 2^i$.

i) Leiten Sie einen Extrapolationsschritt zur Berechnung eines Integrals $I(f)$ her. Betrachten Sie dazu die Entwicklungen (in h^2) zweier Trapezsummen mit den Schrittweiten h_1 und h_2

$$\begin{aligned} T(h_1) &= I(f) + \tau_1 h_1^2 + \tau_2 h_1^4 + \ldots \\ T(h_2) &= I(f) + \tau_1 h_2^2 + \tau_2 h_2^4 + \ldots \end{aligned}$$

und ermitteln Sie daraus eine Approximation für den Wert des Integrals $I(f)$ abhängig von den Trapezsummen $T(h_1)$ und $T(h_2)$. Von welcher Größenordnung ist der Fehler?

ii) Berechnen Sie den Extrapolationswert $p(0)$ für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ auf dem Intervall $[a; b]$, $a = -2$, $b = 2$, mit den drei Schrittweiten $h_1 = b - a$, $h_2 = (b - a)/2$, $h_3 = (b - a)/4$.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der nächst feineren Trapezsumme ($h_4 = (b - a)/8$) aus Aufgabe 2 iii) von Blatt 6 und bestimmen Sie den Aufwand an jeweils nötigen f-Auswertungen. Was stellen Sie fest?

2) Gauß-Quadratur

Die Quadratur nach Gauß ist eine weitere Methode zur numerischen Integration. Bei geeigneter Wahl der Stützstellen x_i und Gewichte $g_i, i = 1, ..., n$ ist sie für Polynome vom Grad $2n - 1$ exakt.
Betrachten wir die Funktion f auf dem Intervall $[-1, 1]$, dann wird das Integral bei der Gauß-Quadratur angenähert durch

$$I(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} g_i f(x_i).$$

i) Die Wahl der Stützstellen $\{x_i;\ i = 1, \ldots, n\} \subset [-1, 1]$ fällt dabei auf die Nullstellen der Legendre-Polynome

$$\omega_n(x) := \frac{n!}{(2n)!} D^n \left((x^2 - 1)^n \right).$$

Berechnen Sie die x_i, so dass die numerische Quadratur von 2. Ordnung ist und Genauigkeit 3 besitzt.

ii) Zeigen Sie, dass die Gewichte g_i über

$$g_i := \int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx$$

berechnet werden können, wobei die L_i für die Lagrange-Polynome stehen. Bestimmen Sie weiter die Gewichte zu den Stützstellen aus Aufgabenteil i).

iii) Berechnen Sie das Integral

$$I(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \qquad f(x) := (x + 1)(x^2 + 1)$$

a) analytisch
b) numerisch unter Verwendung von Gauß-Quadratur mit 2 Gauß-Punkten

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

3) Quadratur nach Archimedes

Wir betrachten den divide-et-impera-Algorithmus zur Integration nach Archimedes. Die Grundidee ist dabei eine hierarchische Sichtweise, so dass in jedem neuen Schritt des Algorithmus jeweils ein zusätzlicher Anteil zum Gesamtergebnis hinzukommt. Das hat zur Folge, dass bei eventueller adaptiver Rechnung nie die vorigen Ergebnisse weggeworfen sondern mitgenutzt werden.

Konkret berechnet dieser Algorithmus immer Dreiecksflächen, die dann aufsummiert werden und so eine Approximation der gesamten Fläche unter dem Funktionsgraphen ergeben (vgl. Abb. 1). Die Fläche eines Dreiecks ist nach der Formel $A = g \cdot h/2$ bestimmt, wobei g die Grundseite (in Abb. 1 vertikal) und h die Höhe (horizontal) beschreibt.

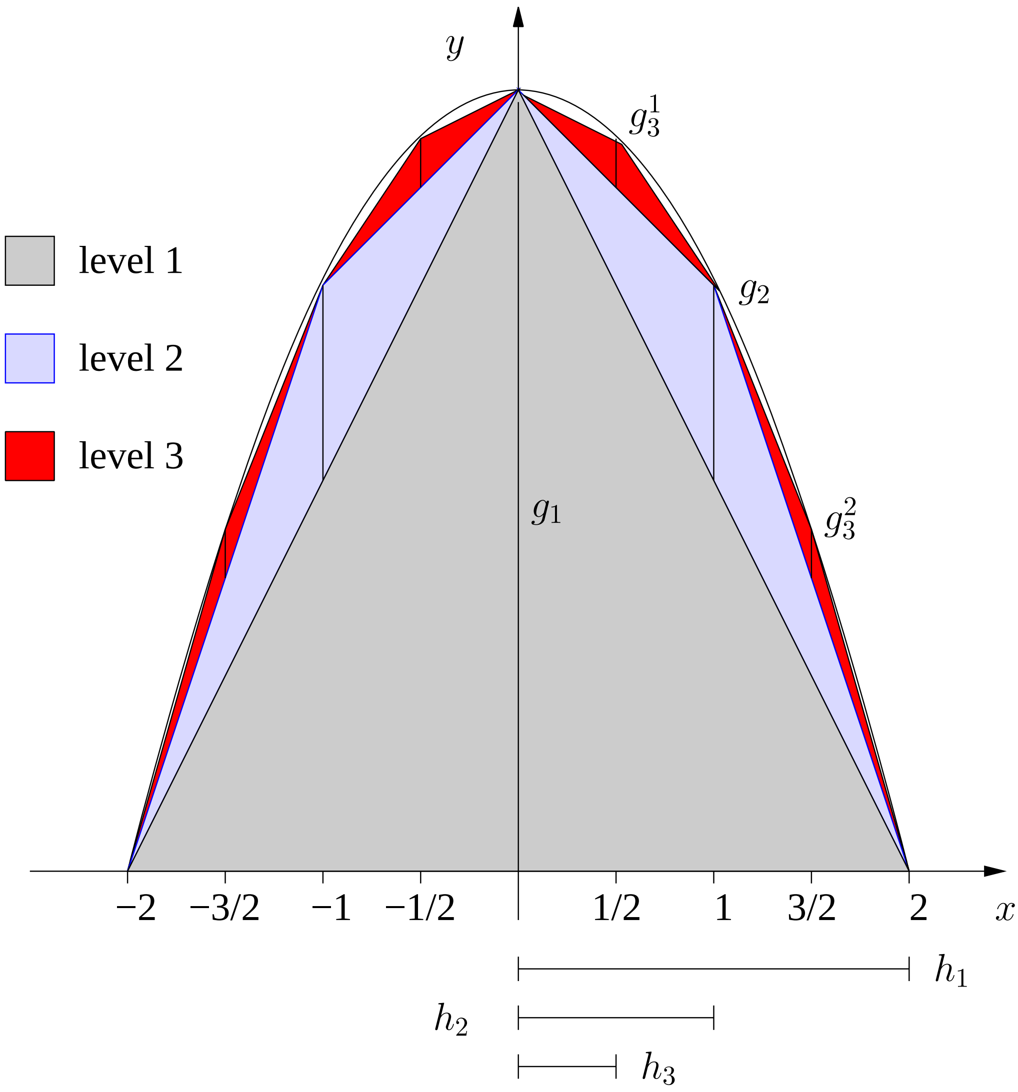

Abbildung 1: Visualisierung des Algorithmus nach Archimedes.

Berechnen Sie nach Archimedes eine Approximation des Integrals

$$I(f) \quad = \quad \int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$, indem Sie ausgehend vom Startdreieck zwei gleichmäßige Verfeinerungsstufen ansetzen (vgl. Abb. 1). Tipp: Nützen Sie die Achsensymmetrie der Funktion $f(x)$ aus!
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 2) iii) von Aufgabenblatt 6. Was stellen Sie fest?