Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Michael Lieb, M. Sc.
Dipl.-Inf. Gerrit Buse

WS 2009/2010

Numerisches Programmieren, Übungen

11. Übungsblatt: Iterative Verfahren I

1) Iterative Verfahren für lineare Gleichungssyteme

Für große lineare Gleichungssyteme kann es unter Effizienzgesichtspunkten interessant sein, anstelle der direkten Gauss-Elimination, ein iteratives Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems zu verwenden. Die vielleicht einfachsten Varianten iterativer Löser werden u.a. als *Splitting-Verfahren* bezeichnet.

i) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, M \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}^n$, der den Splitting-Verfahren zugrundeliegenden Iterationsfunktion

$$\Phi(x) := x + M^{-1}(b - Ax) \ , \tag{1}$$

auch die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist!

ii) Durch Festlegung der Matrix M in Formel (1) erhält man unterschiedliche Splitting-Verfahren. Bei der Auswahl von M sollten folgende Kriterien berücksichtigt werden:

   (a) M sollte möglichst schnell invertierbar sein und

   (b) M sollte die Matrix A möglichst gut approximieren!

   Ordnen Sie die Vorschläge $M_1 = I_n$, $M_2 = A$ und $M_3 = diag(A)$ nach dem Grad der Erfüllung der beiden obigen Kriterien.

iii) Entwickeln Sie eine Pseudo-Code für die Durchführung einer Iteration nach Formel (1) unter Verwendung von $M_3 = diag(A)$!

iv) Das in Teilaufgabe iii) entwickelte Verfahren wird Jacobi-Verfahren genannt. Es lässt sich hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit und Speicherbedarf noch deutlich verbessern. Machen Sie eine Vorschlag zur Verbesserung des Verfahrens! Wie ändert sich dadurch die Iterationsvorschrift in Matrixnotation?

2) Konvergenz des Verfahrens des steilsten Abstiegs

Betrachten Sie die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c, \tag{2}$$

wobei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv symmetrisch definit sei.

i) Finden Sie die optimale Schrittweite α_k eines Iterationsschrittes

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

der Methode des steilsten Absteigs. Dabei bezeichnet $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$ die Suchrichtung.

ii) Zeigen Sie die Ungleichung

$$||x^* - x^{(k+1)}||_A \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}\right) ||x^* - x^{(k)}||_A,$$

wobei $||x||_A := \sqrt{x^T Ax}$ gilt. x^* bezeichnet das Minimum von (2).

Beachten Sie dazu die Hinweise auf der Rückseite des Übungsblatts.

iii) Für symmetrisch positiv definite Matrizen gilt

$$\kappa_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe b) die folgende Fehlerabschätzung für die Methode des steilsten Abstiegs:

$$||x^* - x^{(k)}||_A \leq \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1}\right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A.$$

Was bedeutet dies für die Konvergenz des Verfahrens im Fall von Matrizen A mit sehr großen Konditionszahlen $\kappa_2(A)$?

Hinweise zum Vorgehen bei Teilaufgabe ii):

1. Betrachten Sie den Ausdruck
$$\frac{||x^* - x^{(k+1)}||_A^2}{||x^* - x^{(k)}||_A^2}$$
und setzen Sie die Iterationsvorschrift ein.
2. Um den Ausdruck zu vereinfachen, beachten Sie die Beziehung zwischen dem Fehler $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$ und dem Residuum $r^{(k)} = b - A\,x^{(k)}$:
$$r^{(k)} = -A\,e^{(k)}.$$
3. Verwenden Sie abschließend die *Ungleichung von Kantorovic* für symmetrisch positiv definite Matrizen A:
$$\frac{x^T Ax \cdot x^T A^{-1}x}{(x^T x)^2} \leq \frac{(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A))^2}{4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(A)}.$$
Ein Beweis der Ungleichung ist nicht notwendig.

3) Spezielle Newton-Verfahren

i) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = mx + b$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstelle von f auf direktem Weg!

(b) Formulieren Sie für die Funktion f das Newton-Verfahren! Nach wievielen Iterationen hat das Verfahren die Nullstelle gefunden?

ii) (a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (alternativ: $f(x) = x^2 - 8x + 15$)!

(b) Berechnen Sie die ersten 4 Iterierten sowohl für den Startwert $x_0 = 2$ als auch für den Startwert $\tilde{x}_0 = -2$ (alternativ: $x_0 = 2$ und $\tilde{x}_0 = 6$)! Gegen welche Werte konvergieren die beiden Folgen der Iterierten?