Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Inf. Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2012/2013

Numerisches Programmieren, Übungen

8. Übungsblatt: Matrixkondition, LR-Zerlegung, Pivotsuche

1) Kondition einer Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Kondition der Matrix A anhand der folgenden in der Vorlesung eingeführten Formel unter Verwendung der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$:

$$\kappa = ||A^{-1}|| \cdot ||A|| \tag{1}$$

Zur einfacheren Handhabung der Maximumsnorm für Matrizen kann angenommen werden, dass die Zeilensummennorm äquivalent zur Maximumsnorm für Matrizen aus der Vorlesung ist. Die Zeilensummennorm ist wie folgt definiert:

$$||M||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|$$

Die Zeilensummennorm liefert also die größte Betragssumme über die einzelnen Zeilen der Matrix M.

a) Bestimmen Sie dazu zuerst die Inverse der Matrix A.

b) Im zweiten Schritt bestimmen Sie nun die Kondition anhand von Formel (1) für $a > 2$.

2) Gauß-Elimination und LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir die in der Vorlesung eingeführten Algorithmen der Gauß-Elimination und der LR-Zerlegung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.
Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:

1. Zerlegung der Matrix A: $A = L \cdot R$

```
for i=1:n
    % Assembliere L
    for k=1:i-1
```

```
        L[i,k] := A[i,k];
        for j=1:k-1
            L[i,k] := L[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
        end
        L[i,k] := L[i,k]/R[k,k];
    end
    % Assembliere R
    for k=i:n
        R[i,k] := A[i,k];
        for j=1:i-1
            R[i,k] := R[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
        end
    end
end
```

2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$

```
for i=1:n
    y[i] := b[i];
    for j=1:i-1
        y[i] := y[i]-L[i,j]*y[j];
    end
end
```

3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

```
for i=n:-1:1
    x[i] := y[i];
    for j=i+1:n
        x[i] := x[i]-R[i,j]*x[j];
    end
    x[i] := x[i]/R[i,i];
end
```

a) Veranschaulichen Sie sich den Zerlegungs-Algorithmus (1.). In welcher Reihenfolge werden die Einträge der Matrizen L und R belegt? Wie würde der direkte Gauß-Eliminationsprozess arbeiten?

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Gauß-Elimination für die Matrix A und den Vektor b

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Berechnen Sie die Zerlegung (1.) der Matrix A.

d) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe ii).

e) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

3) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

a) Ohne Spalten-Pivotsuche (keine Zeilenvertauschungen) in exakter Arithmetik (d.h. mit Brüchen rechnen)!

b) Ohne Spalten-Pivotsuche (keine Zeilenvertauschungen) mit Rundungsfehlern: jedes Zwischenergebnis auf 3 Dezimalstellen runden (Gleitpunktarithmetik mit $B = 10$, $t = 3$ und korrekter Rundung: $0.01236 = 123.6 \cdot 10^{-4}$ ergibt 0.0124).

c) Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in b).