Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Inf. Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2012/2013

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

i)

$$\begin{aligned}
I_1(f) &= \int_0^1 f(0)\cdot\frac{x-1}{0-1} + f(1)\cdot\frac{x-0}{1-0}\,dx \\
&= \int_0^1 f(0)\cdot(-x+1) + f(1)\cdot x\,dx \\
&= \left[f(0)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right) + f(1)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= f(0)\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right) + f(1)\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = (2x^2-3x+1) \\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = (-4x^2+4x) \\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = (2x^2-x) \\
I_2(f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\cdot L_k(x)\,dx \\
&= f(0)\cdot\int_0^1 L_0(x)dx + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^1 L_1(x)dx + f(1)\cdot\int_0^1 L_2(x)dx \\
&= \frac{1}{6}\left(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)\right)
\end{aligned}$$

iii) Allgemeines Polynom 3. Grades aufstellen, an den Stützstellen auswerten, einsetzen, ausrechnen und mit analytischem Integral vergleichen!

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\
p(0) &= c_0 \\
p(\frac{1}{2}) &= c_3/8 + c_2/4 + c_1/2 + c_0 \\
p(1) &= c_3 + c_2 + c_1 + c_0 \\
I_2(p) &= \frac{3c_3 + 4c_2 + 6c_1 + 12c_0}{12} \\
&= \left[\frac{c_3x^4}{4} + \frac{c_2x^3}{3} + \frac{c_1x^2}{2} + c_0x\right]_0^1 = \int_0^1 p(x)\,dx
\end{aligned}$$

iv)

	$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$I_1(f)$
a)	$\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)$	0	0	0
b)	$\frac{\sin(\pi x)}{x}$	π	0	$\frac{\pi}{2}$
c)	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	1	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}}$

Bei Aufgabe b) muss die Regel von l'Hospital angewendet werden um den Grenzwert der Funktion an der Stelle $x = 0$ zu bestimmen.

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x} \overset{\text{l'H.}}{=} lim_{x\to 0}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \pi$$

2) Trapezregel und Trapezsumme

i) $f(x) = -x^2 + 4,\ a = -2,\ b = 2$

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\ dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4)\ dx = [-\frac{1}{3}x^3 + 4x]_{-2}^2 \\
&= -\frac{8}{3} + 8 - (\frac{8}{3} - 8) = 16 \cdot \frac{2}{3} = 10.\bar{6} \\
Q_T(f) &= H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = H \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

ii) $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4$

$$\begin{aligned}
I(g) &= \int_a^b g(x)\ dx = \int_0^4 x^4\ dx = [\frac{1}{5}x^5]_0^4 \\
&= \frac{1024}{5} = 204,8 \\
Q_T(g) &= H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = 2 \cdot (0 + 256) = 512
\end{aligned}$$

iii) Berechnung der Trapezsumme für $f(x) = -x^2 + 4,\ a = -2,\ b = 2,\ n = 8$
$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$
$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. $f(x) = f(-x)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f_i	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$	0

$$\begin{aligned}
T_i &= (x_{i+1} - x_i) \cdot (\frac{y_{i+1} - y_i}{2}) = h \cdot (\frac{y_{i+1} - y_i}{2}) \\
\Rightarrow Q_{TS}(f;h) &= \sum_{i=0}^{n-1} T_i = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right) \\
&= h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \frac{f_8}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{7}{4} + 3 + \frac{15}{4} + 4 + \frac{15}{4} + 3 + \frac{7}{4} + 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10.5
\end{aligned}$$

Restglied:

$$R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} = 10.5 - 16 \cdot \frac{2}{3} = Q_{TS}(f;h) - I(f)$$

$\Rightarrow$ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Trapezsumme

iv) Berechnung der Trapezsumme für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4,\ n = 4$
$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
g_i	0	1	16	81	256

$$\begin{aligned}
Q_{TS}(g;h) &= h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2} \right) \\
&= (0 + 1 + 16 + 81 + 128) = 226
\end{aligned}$$

Restglied:

$$\begin{aligned}
|R_{TS}(g;h)| &= \left| h^2 \cdot H \cdot \frac{g^{(2)}(\xi)}{12} \right| = \left| 1 \cdot 4 \cdot \frac{12 \cdot \xi^2}{12} \right| \\
&\leq 4 \cdot 16 = 64
\end{aligned}$$

3) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

i) Berechnung der Fassregel für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4$

$$\begin{aligned} Q_F(g) &= h\left(\frac{f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}\right) \\ &= \frac{4}{6}(0 + 4 \cdot 16 + 256) = \frac{2}{3} \cdot 320 = 213.\bar{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fassregel besser als Trapezregel und Trapezsumme (für $n = 4$)

ii) Simpsonsumme für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4,\ n = 4$ Entspricht zwei Fassregeln, da fuer eine Fassregel zwei Intervalle benötigt werden.

$$\begin{aligned} Q_{SS}(g; h) &= \frac{h}{3} \cdot (g_0 + 4 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 + 4 \cdot g_3 + g_4) \\ &= \frac{h}{3}(0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 81 + 256) = \frac{1}{3} \cdot 616 = 205.\bar{3} \end{aligned}$$

Restglied:

$$R_{SS}(g; h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} = 4 \cdot \frac{24}{180} = \frac{8}{15}$$

$\Rightarrow$ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Simpsonsumme

Wiederholung: Interpolation

a)

```
03 hx = (bx-ax)/nx
04 hy = (by-ay)/ny
05 for(i=0; i<nx; i++) {
09 summe += hx*hy*f(x+hx/2, y+hy/2);
```

b) Anzahl Teilintervalle: $n = 4$
Breite eines Intervalls: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-1}{4} = 2$

$$\begin{aligned}
Q_{SS} &= \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \\
&= \frac{2}{3} \cdot (2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 0) \\
&= \frac{2}{3} \cdot (2 + 4 + 6 + 12 + 0) \\
&= \frac{2}{3} \cdot 24 \\
&= 16
\end{aligned}$$

c) Mit der Restgliedformel lässt sich der Fehler der Simpsonsumme abschätzen, sofern die vierte Ableitung der zu integrierenden Funktion bekannt ist. Da in Teilaufgabe b) nur Punkte vorgegeben sind, nicht aber die Funktion selbst, lässt sich der Fehler mit der Restgliedformel nicht abschätzen.