

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 11. Übungsblatt: Iterative Verfahren I

1) Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme

i) $x_* = x_* + M^{-1}(b - Ax_*) \Leftrightarrow$
 $0 = M^{-1}(b - Ax_*) \Leftrightarrow$
 $0 = b - Ax_* \Leftrightarrow$
 $Ax_* = b$

	Matrix	Invertierbarkeit	Approximation von A
ii)	I_n	schnell	schlecht
	A	langsam	gut
	$diag(A)$	mittel	mittel

iii) $M_3 = diag(A)$
 $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = x^{(k)} + diag(A)^{-1}(b - Ax^{(k)})$
 Betrachtet man nur eine Komponente von $x^{(k+1)}$

$$\begin{aligned}
 x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\
 &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n (a_{ij} x_j^{(k)}) - a_{ii} x_i^{(k)} \right) \\
 &= \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n (a_{ij} x_j^{(k)}) \right)
 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgender Pseudo-Code entwickeln:

```
function jacobi
  for i = 1:n
    summe = b(i);
    for l = 1:n
      if (l != i)
        summe -= a(i,l)*x_alt(l);
      end
    end
    x_neu(i) = summe/a(i,i);
  end
  return;
```

iv) Idee: Alte Approximation sofort überschreiben.

Verfahren: Die Matrix M ist nun anstatt der Diagonalen von A das komplette linke, untere Dreieck (inklusive Diagonale) von A .

2) Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren

$$\text{i) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{array} \right)$$

Rückwärtssubstitution:

$$x_3 = 0$$

$$\frac{3}{2}x_2 + 0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -1$$

$$2x_1 + 1 + 0 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\text{Endergebnis: } x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) • $i = 0$:

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1^{(0)} = \frac{1}{a_{11}}r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

$$y_2^{(0)} = \frac{1}{a_{22}}r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

$$y_3^{(0)} = \frac{1}{a_{33}}r_3^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 r^{(1)} &= b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}r_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
 y_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}r_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
 y_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}r_3^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
 x^{(2)} &= x^{(1)} + y^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- $i = 2$:

$$\begin{aligned}
 r^{(2)} &= b - Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 y_1^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}}r_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
 y_2^{(2)} &= \frac{1}{a_{22}}r_2^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
 y_3^{(2)} &= \frac{1}{a_{33}}r_3^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
 x^{(3)} &= x^{(2)} + y^{(2)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- iii) • $i = 0$:

- $k = 1$:

$$\begin{aligned}
 r_1^{(0)} &= b_1 - \sum_{j=1}^0 a_{1j}x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j^{(0)} = \\
 &= -1 - (0) - (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0) = -1 \\
 y_1^{(0)} &= \frac{1}{a_{11}}r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
 x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} + y_1^{(0)} = 0 + -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

– $k = 2$:

$$\begin{aligned}r_2^{(0)} &= b_2 - \sum_{j=1}^0 a_{2j}x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j^{(0)} = \\&= -1 - (-1 \cdot -\frac{1}{2}) - (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0) = -\frac{3}{2} \\y_2^{(0)} &= \frac{1}{a_{22}}r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \\x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} + y_2^{(0)} = 0 + -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

– $k = 3$:

$$\begin{aligned}r_3^{(0)} &= b_3 - \sum_{j=1}^0 a_{3j}x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j^{(0)} = \\&= 0 - (1 \cdot -\frac{1}{2} + (-1) \cdot -\frac{3}{4}) - (2 \cdot 0) = -\frac{1}{4} \\y_3^{(0)} &= \frac{1}{a_{33}}r_3^{(0)} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{8} \\x_3^{(1)} &= x_3^{(0)} + y_3^{(0)} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

• $i = 1$:

– $k = 1$:

$$\begin{aligned}r_1^{(1)} &= b_1 - \sum_{j=1}^0 a_{1j}x_j^{(2)} - \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j^{(1)} = \\&= -1 - 0 - (2 \cdot -\frac{1}{2} + (-1) \cdot -\frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8}) = -\frac{7}{8} \\y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}r_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{7}{8} = -\frac{7}{16} \\x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} + y_1^{(1)} = -\frac{1}{2} + -\frac{7}{16} = -\frac{15}{16}\end{aligned}$$

– $k = 2$:

$$\begin{aligned}r_2^{(1)} &= b_2 - \sum_{j=1}^0 a_{2j}x_j^{(2)} - \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j^{(1)} = \\&= -1 - (-1 \cdot -\frac{15}{16}) - (2 \cdot -\frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{8}) = -\frac{5}{16} \\y_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}r_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{5}{16} = -\frac{5}{32} \\x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} + y_2^{(1)} = -\frac{3}{4} + -\frac{5}{32} = -\frac{29}{32}\end{aligned}$$

– $k = 3$:

$$\begin{aligned}r_3^{(1)} &= b_3 - \sum_{j=1}^0 a_{3j}x_j^{(2)} - \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j^{(1)} = \\&= 0 - \left(1 \cdot -\frac{15}{16} + (-1) \cdot -\frac{29}{32}\right) - \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) = -\frac{7}{32} \\y_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}r_3^{(1)} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{7}{32} = \frac{7}{64} \\x_3^{(2)} &= x_3^{(1)} + y_3^{(1)} = -\frac{1}{8} + \frac{7}{64} = -\frac{1}{64}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{16} \\ -\frac{29}{32} \\ -\frac{1}{64} \end{pmatrix}$$

3) Optimale Schrittweite des Verfahrens des steilsten Abstiegs

Die Richtung des steilsten Abstiegs $d^{(k)}$ ist durch den negativen Gradienten gegeben:

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} = r^{(k)}.$$

Die optimale Schrittweite α_k lässt sich dadurch bestimmen, dass wir f bzgl. α_k minimieren, d.h. nach α_k ableiten und zu Null setzen:

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{d\alpha_k} f(x^{(k+1)}) \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{d\alpha_k} f(x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}) \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} (\nabla f(x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}))^T \cdot r^{(k)} \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} (A(x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}) - b)^T \cdot r^{(k)} \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} (-r^{(k)} + \alpha_k Ar^{(k)})^T \cdot r^{(k)} \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} -(r^{(k)})^T + \alpha_k (r^{(k)})^T A \cdot r^{(k)} \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} -(r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k (r^{(k)})^T Ar^{(k)}\end{aligned}$$

Aufgelöst nach α_k ergibt das:

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T Ar^{(k)}}$$

4) Spezielle Newton-Verfahren

- i) a) $x_* = -\frac{b}{m}$
b) $x_{k+1} = -\frac{b}{m}$ beschreibt direkt die Nullstelle!
(direktes Einsetzen in Funktion liefert 0)

ii) a)

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 3}{2x_k - 2}$$

und alternativ:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 15}{2x_k - 8}$$

b)

	$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 3}{2x_k - 2}$		$x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 15}{2x_k - 8}$	
x_0	2	-2	2	6
x_1	3,5	-1,16667	2,75	5,25
x_2	3,05	-1,00641	2,975	5,025
x_3	3,0006	-1,000010	2,9997	5,0030
x_4	3,00000	-1,0	3,000000	5,0000000

Man beobachtet lokale Konvergenz zu jeweils beiden Nullstellen beider Parabeln, da die angegebenen Startwerte entsprechend gewählt sind.

Vertiefung: Konvergenz des Verfahrens des steilsten Abstiegs

i) Nutzen wir die Beziehungen

$$A(x^* - x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} = r^{(k)}, \quad x^* - x^{(k)} = A^{-1}r^{(k)}, \quad e^{(k)} = -A^{-1}r^{(k)}$$

(da A symmetrisch positiv definit und damit invertierbar ist) sowie die optimale Schrittweite

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}},$$

(vgl. Aufgabe 3) aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\|x^* - x^{(k+1)}\|_A^2}{\|x^* - x^{(k)}\|_A^2} &= \frac{(x^* - x^{(k+1)})^T A (x^* - x^{(k+1)})}{(x^* - x^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)})} \\ &= \frac{(x^* - x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})}{(x^* - x^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)})} \\ &= \frac{(-e^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})^T A (-e^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})}{(-e^{(k)})^T A (-e^{(k)})} \\ &= \frac{((A^{-1}r^{(k)}) - \alpha_k r^{(k)})^T A ((A^{-1}r^{(k)}) - \alpha_k r^{(k)})}{((A^{-1}r^{(k)})^T A (A^{-1}r^{(k)}))} \\ &= \frac{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)} - 2\alpha_k (r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\ &= 1 - \frac{2\alpha_k (r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\ &= 1 - \frac{2 \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}} (r^{(k)})^T r^{(k)} - \left(\frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}} \right)^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\ &= 1 - \frac{((r^{(k)})^T r^{(k)})^2}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)} \cdot (r^{(k)})^T A r^{(k)}} \\ &\stackrel{\text{Kantorovic}}{\leq} 1 - \frac{4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(A)}{(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A))^2} \\ &= \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right)^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen (alle Terme sind positiv, so dass kein Betrag notwendig ist!) liefert schließlich

$$\|x^* - x^{(k+1)}\|_A \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right) \|x^* - x^{(k)}\|_A.$$

ii) Wenden wir die Ungleichung k Mal an (für jeden Iterationsschritt ein Mal), so ergibt

sich

$$\begin{aligned}\|x^* - x^{(k)}\|_A &\leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right)^k \|x^* - x^{(0)}\|_A \\ &= \left(\frac{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} - 1}{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} + 1} \right)^k \|x^* - x^{(0)}\|_A \\ &= \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^k \|x^* - x^{(0)}\|_A,\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für die Kondition von Matrizen, die symmetrisch positiv definit sind, gilt:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$