

Numerisches Programmieren 2012/13

Christoph Riesinger, Jürgen Bräckle

04. - 07. Februar 2013



Topics

Maschinenzahlen

Interpolation

Numerische Integration

Fouriertransformation

Lineare Gleichungssysteme

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Maschinenzahlen

Fließkommazahlen

$$\mathbb{F}_{B,t} := \left\{ M \cdot B^E : M = 0 \text{ or } B^{t-1} \leq |M| < B^t; M, E \in \mathbb{Z} \right\}$$

- M : Mantisse
- E : Exponent
- B : Basis (binär, oktal, dezimal, hexadezimal)
- t : Anzahl der Digitalstellen

weitere Aspekte

- Rundungsfehler (relativ/absolut)
- Rechnen mit Maschinenzahlen (starke/schwache Hypothese)
- Kondition & Stabilität
- Auslöschung

Interpolation

Begriffe

- Stützstellen
- Stützwerte
- Stützpunkte

1. Möglichkeit der Unterteilung

- **Lagrange Interpolation**
Jeder Stützstelle x_i ist nur eine Information, der Stützwert y_i zugeordnet.
- **Hermite Interpolation**
Jeder Stützstelle x_i sind mehrere Informationen wie Stützwert y_i , Steigung y_i' und/oder Krümmung y_i'' zugeordnet.

Interpolation (fort.)

2. Möglichkeit der Unterteilung

Art der Interpolation	Beispiele
Polynominterpolation	Lagrange-Polynom Aitken-Neville dividierte Differenzen/Newton
Polynomsplines	Polygonzug quadratische Splines kubische Splines
trigonometrische Interpolation	diskrete Fouriertransformation schnelle Fouriertransformation

Numerische Integration

Wissenswertes

- $n + 1$ Stützstellen definieren eindeutig ein Polynom vom Grad n
- Für Polynominterpolation spielt die Reihenfolge der Stützstellen *keine* Rolle

Grundprinzip

- Zu integrierende, analytische Funktion mit anderer, sehr einfach zu integrierender Funktion approximieren
- Einfach zu integrierende Funktion exakt integrieren

Numerische Integration (fort.)

Restglied Trapezsumme

$$R_{\text{TS}}(f; h) = h^2 \cdot (b - a) \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12}$$

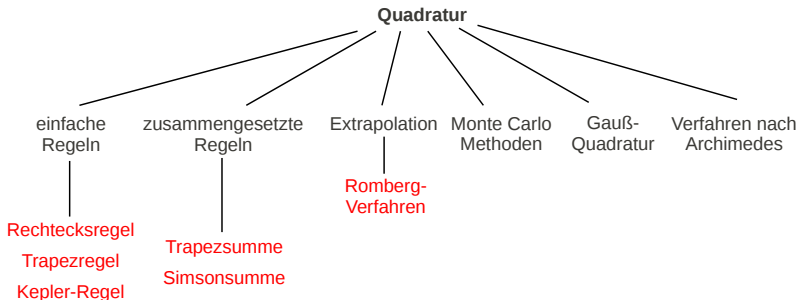
Restglied Simpsonsumme

$$R_{\text{SS}}(f; h) = h^4 \cdot (b - a) \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{180}$$

Restglied Gaußquadratur

$$R_{\text{GQ}}(f; h) = \frac{(b - a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n + 1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi)$$

Numerische Integration (fort.)



Fouriertransformation

Grundlagen

- Komplexe Zahlen
- n -te Einheitswurzeln

Diskrete Fouriertransformation (DFT) ($\mathcal{O}(n^2)$)

(mind.) Zweierlei Interpretationen möglich:

- Interpolation durch ein (komplexwertiges) Polynom mit den n -ten Einheitswurzeln als Stützstellen
- Transformation: räumliche/zeitliche Domäne \Leftrightarrow Frequenzspektrum

Fouriertransformation (fort.)

DFT

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot e^{-i \frac{2\pi}{n} jk}$$

IDFT

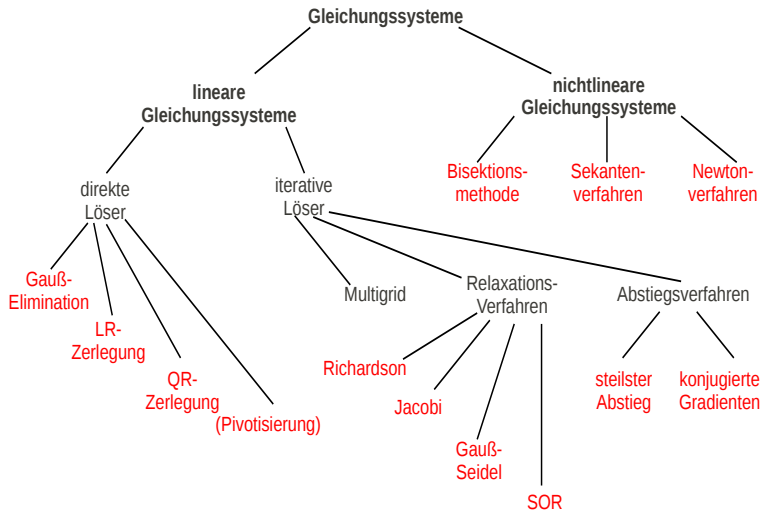
$$v_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot e^{i \frac{2\pi}{n} jk}$$

Schnelle Fouriertransformation (FFT) ($\mathcal{O}(n \log n)$)

Ablauf in zwei Phasen:

- Sortierphase
- Kombinationsphase (Butterfly-Operator)

Lineare Gleichungssysteme



Gewöhnliche Differentialgleichungen

Was sind Differentialgleichungen?

Eine Differentialgleichung ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion, die von einer oder mehreren Variablen abhängt und in den Ableitungen der Funktion enthalten sind.

Randbedingungen für Differentialgleichungen

- Anfangswertprobleme (AWP)
- Randwertprobleme (RWP)

Begriffe

- lokaler/globaler Diskretisierungsfehler
- Konsistenz/Konvergenz
- Steifheit

Gewöhnliche Differentialgleichungen (fort.)

