Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2013/2014

Numerisches Programmieren, Übungen

2. Übungsblatt: Kondition, Stabilität und Gauß-Elimination

1) Kondition, Stabilität

Die (relative) Konditionszahl $cond(f, x)$ für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert:

$$cond(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

a) Berechnen Sie die relative Konditionszahl der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von x:

   i) $f_1(x) = a \cdot x$, ii) $f_2(x) = a - x$, iii) $f_3(x) = 3e^x - 3$.

   Interpretieren Sie jeweils das Ergebnis!

   Wie lautet die Konditionszahl von f_3 an der Stelle $x = 0$ (Grenzwertbetrachtung!)?

b) Untersuchen Sie die Stabilität einer computergestützten Auswertung von f_3 mit Hilfe der Epsilontik.

   (Hinweise: Betrachten Sie den relativen Fehler $\left|\frac{rd(f(x))-f(x)}{f(x)}\right|$. Die Auswertung von e^x erzeuge auch nur einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_M$.)

2) Beispiel für schlechte Kondition: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1 : y = x$$
$$g_2 : y = mx + 1,$$

deren Schnittpunkt berechnet werden soll. Der tatsächliche Eingabe-Parameter $m = 1.005$ wird dabei zu $\tilde{m} = 1.01$ aufgerundet. Wir wollen nun den dadurch entstandenen Fehler im x-Wert des Schnittpunktes untersuchen.

a) Berechnen Sie den x-Wert des Schnittpunktes für ein allgemeines m, und stellen Sie diese Beziehung als Funktion $x = f(m)$ dar.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl des Problems aus a) an der gegebenen Stelle m.

c) Wie sieht die tatsächliche Verstärkung des relativen Eingabefehlers aus?

3) Ableitungsapproximation

Die erste Ableitung einer Funktion f an einem Punkt x_0 ist definiert durch

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

und kann durch den rechtsseitigen Differenzenquotienten

$$D_f(x_0, h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

für kleine positive Werte von h numerisch approximiert werden. Dies geschieht auch oft in praktischen Anwendungen, in denen es nicht möglich oder zu aufwändig ist, die Ableitung auf analytischem Weg zu bestimmen. Dabei stellt sich die Frage, wie man die sogenannte Schrittweite h wählt. Wählt man sie zu groß, dann ist der Differenzenquotient aus analytischen Gründen keine gute Näherung für die Ableitung. Wählt man andererseits h zu klein, so gilt $f(x_0 + h) \approx f(x_0)$, und bei der Auswertung von Formel (1) tritt **Auslöschung** auf.

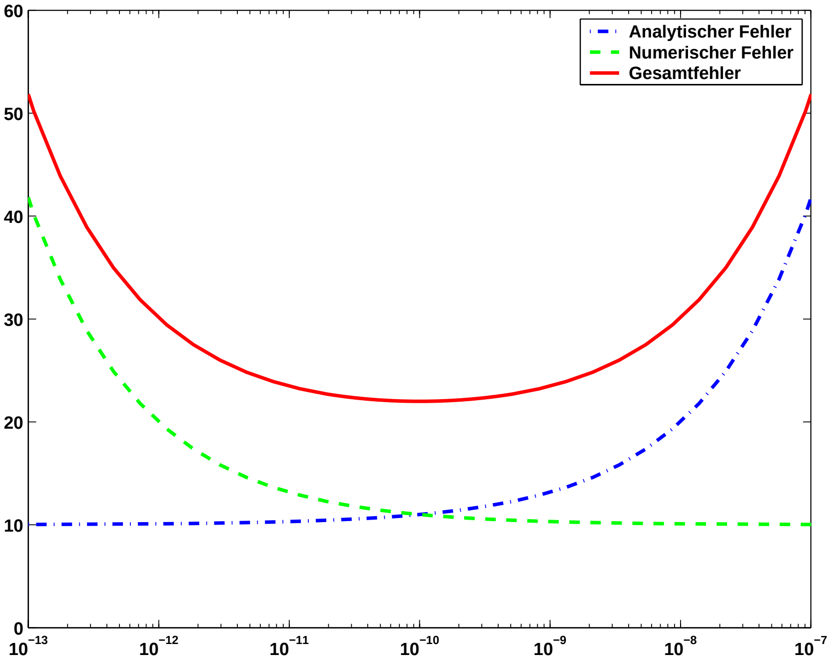

Abbildung 1: Fehlerquellen bei der Ableitungsapproximation

a) Leiten Sie mit Hilfe der Taylorformel

$$f(x_0 + h) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2!} f''(z) \cdot h^2, \quad z \in (x_0; x_0 + h)$$

eine obere Schranke (abhängig von der Maschinengenauigkeit ε_{Ma}) für den absoluten Fehler $err_{abs} = |f'(x_0) - rd\big(D_f(x_0, h)\big)|$ her. Berücksichtigen Sie dabei sowohl Rundungsfehler in den Eingabedaten $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$ als auch bei der Berechnung von $D_f(x_0, h)$.

b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a), um in Abhängigkeit von ε_{Ma} anzugeben, wie eine optimale Schrittweite h zu wählen ist, so dass der absolute Fehler err_{abs} minimiert wird.

4) Gauß-Elimination

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Abschluss des Kapitels über Gleitpunktzahlen, Rundung und Kondition ist nachfolgend eine Aufgabe aus einer Semestralklausur aufgeführt. Diese ist dazu gedacht, dass man den Stoff noch einmal selbst üben kann. Sie wird deshalb nicht in der Übung behandelt.

Wiederholung: Gleitpunktzahlen, Rundung und Kondition

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3}. \tag{2}$$

a) Die Formel (2) für die Funktion $f(x)$ soll unter Anwendung von Gleitpunktarithmetik ausgewertet werden. Geben Sie den Term $rd(f(x))$ an, der alle Fehler, die bei der Auswertung entstehen, berücksichtigt. Die Negation eines Wertes x der Form $neg(x) = -x$ bewirkt keinen Rundungsfehler.
Gehen Sie von exakten Eingabedaten x aus. Linearisieren Sie, indem Sie Fehlerterme höherer Ordnung vernachlässigen.

b) Berechnen Sie den **relativen** Rundungsfehler, der bei der Berechnung des Ergebnisses $f(x)$ auftritt.
Wie verhält sich der relative Rundungsfehler für große x, d.h. für $x \to \pm\infty$? Ist die Auswertung für alle $x \in \mathbb{R}$ stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Zeigen Sie, dass für die Kondition einer Funktion f

$$cond(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

im Fall von Funktion (2) gilt:

$$cond(f, x) = x \cdot \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Was lässt sich daraus für die Auswertung der Funktion (2) an der Stelle $x = 0$ folgern?