Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2013/2014

Numerisches Programmieren, Übungen

3. Übungsblatt: Interpolation

1) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Zur Auswertung eines Interpolationspolynoms $p(x)$ zu den Punkten $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n$ an einer einzelnen Stelle x kann der Algorithmus von Aitken-Neville verwendet werden:

```
for i=0:n; p[i,0]:=y[i]; end
for k=1:n
    for i=0:n-k
        p[i,k] := p[i,k-1] + (x-x[i])/(x[i+k]-x[i])*(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]);
    end
end
```

Die sukzessive Berechnung der $p[i,k]$ ist hier im Vergleich zur Vorlesungsfolie äquivalent umgeformt und kann mit einem Dreiecksschema veranschaulicht werden:

x_i	$i \backslash k$	0		1		2		$\cdots$
x_0	0	$p[0,0] = y_0$	$\rightarrow$	$p[0,1]$	$\rightarrow$	$p[0,2]$	$\rightarrow$	$\cdots$
			$\nearrow$		$\nearrow$			
x_1	1	$p[1,0] = y_1$	$\rightarrow$	$p[1,1]$	$\rightarrow$	$\vdots$		
			$\nearrow$					
x_2	2	$p[2,0] = y_2$	$\rightarrow$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						

Der Wert des Polynoms $p(x)$ an der Stelle x steht nach Abschluss des Algorithmus' in $p[0,n]$.

Berechnen Sie den Wert des kubischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 1$ für die Punkte $P_0 = (-2, -7)$, $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ und $P_3 = (2, 9)$ mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

2) Polynominterpolation nach Newton

Neben der Lagrangeschen Darstellungsweise bieten auch die Newtonschen dividierten Differenzen die Möglichkeit, ein Interpolationspolynom $p(x)$ analytisch zu beschreiben (d.h. seine Koeffizienten zu berechnen). Mit zu interpolierenden Punkten $P_i = (x_i, y_i)$ gelten die folgenden Formeln aus der Vorlesung:

$$[x_i]f = y_i \tag{1}$$

$$[x_i, x_{i+1}]\, f = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{2}$$

$$[x_i, \cdots, x_{i+k}]\, f = \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}. \tag{3}$$

Man ordnet die dividierten Differenzen in ein Neville-artiges Schema:

x_i	$i \setminus k$	0		1		2		$\cdots$
x_0	0	$[x_0]f$	$\rightarrow$	$[x_0, x_1]f$	$\rightarrow$	$[x_0, x_1, x_2]f$	$\rightarrow$	$\cdots$
			$\nearrow$		$\nearrow$			
x_1	1	$[x_1]f$	$\rightarrow$	$[x_1, x_2]f$	$\rightarrow$	$\vdots$		
			$\nearrow$					
x_2	2	$[x_2]f$	$\rightarrow$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						

Damit kann man in der ersten Zeile direkt die Koeffizienten $[x_0, \cdots, x_{i+k}]f$ des Interpolationspolynoms $p(x)$ in der folgenden Gestalt ablesen:

$$p(x) = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \ldots + [x_0, \cdots, x_n]f \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)\ . \tag{4}$$

a) Berechnen Sie die Newtonschen dividierten Differenzen für das Interpolationspolynom $p(x)$ durch die Punkte $P_0 = (-1, -3)$, $P_1 = (1, 1)$ und $P_2 = (3, -3)$ mit den Gleichungen (1) - (3). Stellen Sie dazu auch das Neville-artige Schema auf und berechnen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel (4)!

b) Nun soll ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (0, 0)$ zur Interpolation hinzugenommen werden. Berechnen Sie die noch fehlenden dividierten Differenzen, erweitern Sie das Neville-artige Schema aus Teilfaufgabe a) und geben Sie die Koeffizienten des neuen Gesamtpolynoms $q(x)$ nach Formel (4) an!

c) Betrachten Sie nun eine Funktion $f \in C^{n+1}$, für die das in b) berechnete Polynom $p(x)$ ein zugehöriger Interpolant ist, d.h. $P_i = (x_i, f(x_i))$.
Geben Sie eine Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers an der Stelle $x = 2$ an.

3) Bezier-Kurven und Computergrafik

Bezier-Kurven gehören im engeren Sinne nicht zu den Interpolations-Methoden, weil nicht alle Kontrollpunkte interpoliert werden. Aufgrund ihrer Bedeutung bei der Modellierung und beim Design von realen Gegenständen (siehe Abb. 1) finden sie sich aber in den meisten CAD-Programmen und sollen hier in Grundzügen behandelt werden.

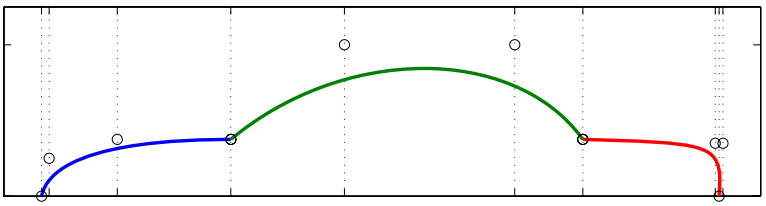

Abbildung 1: Einfache Fahrzeug-Silhouette, modelliert mit drei Bezier-Kurven zu je vier Kontrollpunkten.

In dieser Aufgabe werden lediglich zweidimensionale Bezier-Kurven mit vier Kontrollpunkten betrachtet. Man spricht nicht wie bisher von Stützpunkten, weil nicht mehr alle Kontrollpunkte von der resultierenden Kurve durchlaufen werden.

Eine Bezier-Kurve $s(t)$ ist definiert durch

$$s : [0;1] \to \mathbb{R}^2, \quad s(t) = \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix}.$$

Die beiden Komponenten $s_x(t),\ s_y(t)$ werden mit Hilfe der skalaren Bernstein-Polynome

$$B_i : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad B_i(t) \;=\; \binom{3}{i}\, t^i\, (1-t)^{3-i}, \qquad i = 0, \ldots, 3 \tag{5}$$

als kubische Polynome in t gewählt. Dabei bezeichnet $\binom{3}{i} = \dfrac{3!}{i!(3-i)!}$ den Binomialkoeffizient und keinen 2d-Vektor.

Zusammen mit den Kontrollpunkten $\mathbf{b_i} = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$ $(i = 0, \ldots, 3)$ erhält man somit eine Beschreibung der Gesamtkurve $s(t)$:

$$s(t) \;:=\; \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b_i} \cdot B_i(t) \qquad \text{mit} \qquad t \in [0,1]\,. \tag{6}$$

a) Berechnen Sie die $B_i(t)$ $(i = 0, \ldots, 3)$ explizit mit Hilfe von Glg. (5).

b) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\sum_{i=0}^{3} B_i(t) \;=\; 1 \qquad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Da auch $B_i(t) \geq 0$ gilt, bedeutet das, dass die Bezier-Kurve stets innerhalb der konvexen Hülle (hier ein Viereck) ihrer Kontrollpunkte verläuft.

c) Zeigen Sie, dass die Bezier-Kurve $s(t)$ stets die Kontrollpunkte $\mathbf{b_0}$ bzw. $\mathbf{b_3}$ für $t = 0$ bzw. $t = 1$ interpoliert!

Zeigen Sie ferner, dass die Kontrollpunkte $\mathbf{b_1}$ bzw. $\mathbf{b_2}$ stets auf der Tangentengeraden τ an die Bezier-Kurve im Punkt $\mathbf{b_0}$ bzw. $\mathbf{b_3}$ liegen, indem Sie folgende Darstellung von τ verwenden:

$$\begin{aligned} \tau(\alpha)_{\mathbf{b_0}} &= \mathbf{b_0} + \alpha \cdot \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \tau(\alpha)_{\mathbf{b_3}} &= \mathbf{b_3} + \alpha \cdot \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

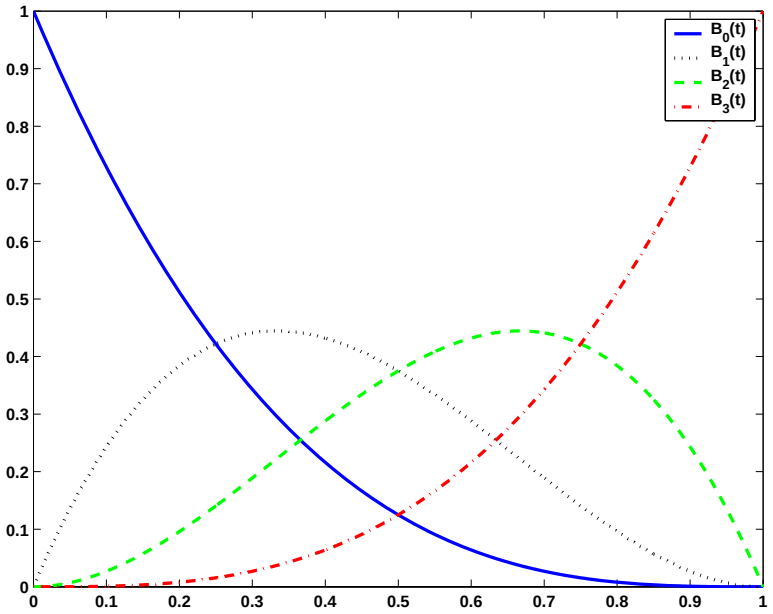

Abbildung 2: Visualisierung der Bernsteinpolynome $B_0(t), \ldots, B_3(t),\ t \in [0; 1]$.