Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2013/2014

Numerisches Programmieren, Übungen

6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

Nach der Beschäftigung mit Interpolationsformeln drängt sich für die numerische Integration die folgende Idee geradezu auf. Kann man das Integral einer Funktion über ein Intervall nicht exakt bestimmen, so bestimmt man erst eine möglichst genaue Interpolationsfunktion, die man exakt integrieren kann.

a) Bestimmen Sie die Näherungsformel I_1 für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$, die sich durch die Integration des Interpolationspolynoms von Lagrange mit den zwei Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt!

b) Welche Näherung I_2 ergibt sich durch Hinzunahme einer dritten Stützstelle in der Mitte des Intervalls, das heißt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$?

c) Sei ein beliebiges Polynom 3. Grades $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} c_i x^i$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Näherungsformel I_2 aus Teilaufgabe b) die Gleichung

$$I_2(p) \quad = \quad \int\limits_0^1 p(x)\; dx$$

stets erfüllt!

d) Benutzen Sie die in Teilaufgabe a) entwickelte Formel, um die Integrale

i) $\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\; dx$,

ii) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\; dx$ und

iii) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\; dx$

näherungsweise zu bestimmen!

2) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen (Polynome) per Hand und mit den Formeln der Trapezregel und Trapezsumme aus der Vorlesung integrieren. Ziel der Berechnungen ist also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_T(f)$ und $Q_{TS}(f;h)$,

$$Q_T(f) \quad = \quad H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{TS}(f;h) \quad = \quad h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_T(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

b) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_T(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

c) Berechnen Sie $Q_{TS}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{TS}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{TS}(f;h) \quad = \quad h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{4}$$

d) Berechnen Sie $Q_{TS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{TS}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

3) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 2) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_F(g)$ und $Q_{SS}(g;h)$ der Fassregel und der Simpson-Summe:

$$Q_F(g) \quad = \quad H \cdot \frac{g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)}{6} \tag{5}$$

$$Q_{SS}(g;h) \quad = \quad \frac{h}{3} \cdot \left(g_0 + 4g_1 + 2g_2 + 4g_3 + \ldots + 2g_{n-2} + 4g_{n-1} + g_n\right), \tag{6}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $g_i = g(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_F(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0,\ b = 4$.

b) Berechnen Sie $Q_{SS}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{SS}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{SS}(g;h) \quad = \quad h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{7}$$

Zum Abschluss des Kapitels über Quadratur ist nachfolgend wieder eine kurze Aufgabe aus einer Semestralklausur aufgeführt. Diese ist dazu gedacht, den Stoff noch einmal selbst üben zu können. Sie wird deshalb nicht in der Übung behandelt.

Wiederholung: Quadratur

a) Der folgende Pseudocode soll die gegebene zweidimensionale Funktion f auf dem gegebenen Gebiet mit Hilfe einer zweidimensionalen Rechtecksumme integrieren. Es wird also das folgende Integral approximiert:

$$\int_{ay}^{by} \int_{ax}^{bx} f(x, y) dx dy$$

Die Anzahl an Unterteilungen für die Rechtecksumme in die beiden Richtungen wird durch nx und ny bestimmt. Von jedem Teilgebiet wird der Funktionswert im Mittelpunkt als Beitrag zum Integral aufaddiert.

```
01 rechtecksumme2D(f, ax, bx, ay, by, nx, ny)
02   summe = 0
03   hx = (ax-bx)/nx
04   hy = (ay-by)/ny
05   for(i=1; i<=nx; i++) {
06     for(j=0; j<ny; j++) {
07       x = ax + i*hx;
08       y = ay + j*hy;
09       summe += hx*hy*f(x, y);
10     end
11   end
12   return summe
13 end
```

Allerdings ist das Programmstück fehlerhaft. Durch Korrekturen in vier Zeilen lassen sich die Fehler beheben. Nennen Sie die entsprechenden Zeilen und korrigieren Sie die Fehler!

b) Die Fläche unter einer Funktion soll mit Hilfe der Simpsonsumme abgeschätzt werden. Allerdings ist die Funktion selbst nicht bekannt, sondern nur die Messwerte für folgende x-Koordinaten: $(1, 3, 5, 7, 9)$. Die zugehörigen y-Werte lauten: $(2, 1, 3, 3, 0)$. Verwenden Sie die Simpsonsumme unter Einbeziehung aller fünf Punkte, um die Fläche abzuschätzen.

c) Die Quadratur mit Hilfe der Simpsonsumme liefert normalerweise nicht die exakte Fläche unter einer Kurve, sondern nur eine Näherung. Nennen Sie eine Methode, mit der eine obere Schranke für den verbleibenden Fehler der Simpsonsumme berechnet werden kann. Ist diese Methode auch für die Quadratur aus Teilaufgabe b) anwendbar (Begründung!)?