

Numerisches Programmieren, Übungen

8. Übungsblatt: Matrixkondition, LR-Zerlegung, Pivotsuche

1) Kondition einer Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Kondition der Matrix A anhand der folgenden in der Vorlesung eingeführten Formel unter Verwendung der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$:

$$\kappa = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \quad (1)$$

Zur einfacheren Handhabung der Maximumsnorm für Matrizen kann angenommen werden, dass die Zeilensummennorm äquivalent zur Maximumsnorm für Matrizen aus der Vorlesung ist. Die Zeilensummennorm ist wie folgt definiert:

$$\|M\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$$

Die Zeilensummennorm liefert also die größte Betragssumme über die einzelnen Zeilen der Matrix M .

- a) Bestimmen Sie dazu zuerst die Inverse der Matrix A .
- b) Im zweiten Schritt bestimmen Sie nun die Kondition anhand von Formel (1) für $a > 2$.

2) Gauß-Elimination und LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir den Algorithmus der LR-Zerlegung aus der Vorlesung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.

Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:

1. Zerlegung der Matrix A : $A = L \cdot R$

2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$

3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

- a) Lösen Sie unter Verwendung der Gauß-Elimination das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Berechnen Sie die Zerlegung (1.) der Matrix A .
- c) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe a).
- d) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

3) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

- a) Ohne Spalten-Pivotsuche (keine Zeilenvertauschungen) in exakter Arithmetik (d.h. mit Brüchen rechnen)!
- b) Ohne Spalten-Pivotsuche (keine Zeilenvertauschungen) mit Rundungsfehlern: jedes Zwischenergebnis auf 3 Dezimalstellen runden (Gleitpunktarithmetik mit $B = 10$, $t = 3$ und korrekter Rundung: $0.01236 = 123.6 \cdot 10^{-4}$ ergibt 0.0124).
- c) Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in b).