Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2013/2014

Numerisches Programmieren, Übungen

12. Übungsblatt: Iterative Eigenwertlöser und Klausurvorbereitung

1) Satz von Gerschgorin

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}. Dann liegt jeder Eigenwert λ von A in mindestens einer der Kreisscheiben K_j, die durch

$$K_j := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^{n} |a_{jk}| \right\}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

definiert sind.

Zeichnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gerschgorin-Kreise und finden Sie eine obere Schranke für die Kondition $\kappa_2(A)$.
Hinweis: Benutzen Sie die durch die Euklidische Norm induzierte Norm $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$.

2) Iterationsverfahren

a) Berechnen Sie analytisch alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Führen Sie zwei Iteration der direkten Vektoriteration (power iteration) für A

   a) ohne Shift,

   b) mit Shift $\mu = 1.5$ und

   c) mit Shift $\mu = 3.5$

   durch und berechnen Sie die zugehörige Eigenwertapproximation. Benutzen Sie dazu $x_0 = (1, 0)^T$ als Startvektor. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Iteration? Wie ist die Konvergenzrate für den jeweiligen Fall?

c) Für welchen Shift μ konvergiert die direkte Vektoriteration (power iteration) gegen den ersten bzw. zweiten Eigenwert von A? Was passiert, falls $\mu = 3$ gewählt wird?

3) Klausurvorbereitung: Abstiegsverfahren (Klausuraufgabe aus dem WS 2011/12)

a) Führen Sie zwei Schritte des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* (steepest descent) aus, um eine iterative Lösung für das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Gesucht ist also $x^{(2)}$. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die exakte Lösung des Gleichungssystems ist übrigens $x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) In dieser Teilaufgabe soll das Verständnis rund um Abstiegsverfahren getestet werden. Antworten Sie auf die Fragen in wenigen Sätzen. Die folgenden Fragen beziehen sich nicht unmittelbar auf die Rechnung in Teilaufgabe i).

i) Für welchen Fall konvergiert das *Verfahrens des steilsten Abstiegs* (steepest descent) in nur einer Iteration? Hierbei ist **nicht** der triviale Fall gemeint, in dem der Startwert $x^{(0)}$ bereits der exakten Lösung x^* entspricht.

ii) Wie ist das Konvergenzverhalten des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* allgemein (eine Antwort in der Form "gut" oder "schlecht" ist hier bereits ausreichend)?

Sollte Ihre Antwort "gut" sein: Begründen Sie kurz Ihre Antwort!
Sollte Ihre Antwort "schlecht" sein: Nennen Sie eine Möglichkeit, das Konvergenzverhalten zu verbessern!

iii) Eigentlich ist das *Verfahrens des steilsten Abstiegs* eine numerische Methode zum Finden von lokalen Minima von Funktionen. Hier wird es jedoch zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen mit symmetrischen und positiv definiten Systemmatrizen A verwendet. Skizzieren Sie kurz die Transformation des Problems "löse Lineares Gleichungssystem mit symmetrischer und positiv definiter Systemmatrix $Ax = b$" in "finde Minimum einer Funktion $f(x)$"! Ein Beweis, warum diese Transformation zulässig ist, ist **nicht** notwendig.

4) Klausurvorbereitung: Interpolation

Betrachten Sie die Funktion

$$f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \tag{1}$$

a) Stellen Sie den Interpolanten $p(x)$ der Funktion $f(x)$ mit den Stützstellen $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, and $P_2 = (x_2, y_2)$ und

$$x_0 = -1, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 1$$

auf! Bestimmen Sie eine explizite Darstellung des Interpolanten in der Form

$$p(x) = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \ldots + [x_0, \ldots, x_n]f \cdot \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k). \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass für den Interpolanten aus Teilaufgabe a) die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad \forall\, x \in [-1, 1] \tag{3}$$

Nutzen Sie dazu die Fehlerformel für polynomielle Interpolation und zeigen Sie zunächst folgende Aussage:

$$\exists\, \xi \in [-1, 1]: \quad |f(x) - p(x)| = \frac{4\, |x^3 - x|}{|\xi + 2|^5}. \tag{4}$$

Schätzen Sie anschließend die beiden Terme $g_1(x) := |x^3 - x|$ und $g_2(\xi) := |\xi + 2|$ ab, um die Fehlerabschätzung (3) zu zeigen.

c) Das Schema von Aitken und Neville soll zur Interpolation der folgenden Stützstellen, wie in Abbildung 1 dargestellt, verwendet werden:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{5}, 1\right), \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{2}{5}, 2\right), \quad (x_3, y_3) = \left(\frac{3}{5}, 1\right), \quad (x_4, y_4) = \left(\frac{4}{5}, 2\right)$$

Welche Werte ergeben sich im Dreiecksschema, wenn die Polynome an der Stelle $\bar{x} = 0$ ausgewertet werden? Tragen Sie die Werte in ein für Aitken und Neville typisches Dreiecksschema ein.

Es ist nicht notwendig, alle Werte mit Hilfe der Formel von Aitken und Neville zu berechnen, sondern Sie können zur Bestimmung der Werte Abbildung 1 nutzen und die Aufgabe graphisch lösen. Alle Werte sind in $\mathbb{Z}$ enthalten. Abbildung 1 zeigt die vier Stützstellen sowie die Interpolanten zu den Stützpunkten $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$ bzw. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

d) Beide Plots in Abbildung 2 zeigen jeweils die Funktion $\sin(x)$ sowie einen zugehörigen Interpolaten, der aus einer stückweisen Interpolation mit 5 Stützstellen resultiert. Ordnen Sie jedem der beiden Graphen eine der beiden Interpolationsarten

(1) kubische Spline-Interpolation

(2) stückweise Hermite-Interpolation

zu und begründen Sie **kurz** Ihre Entscheidung!

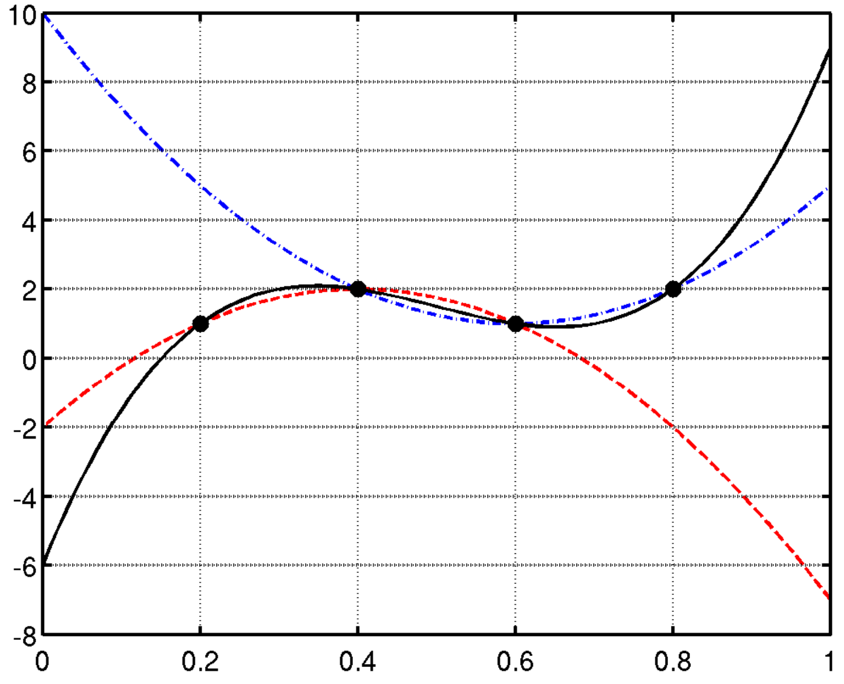

Abbildung 1: Polynominterpolation

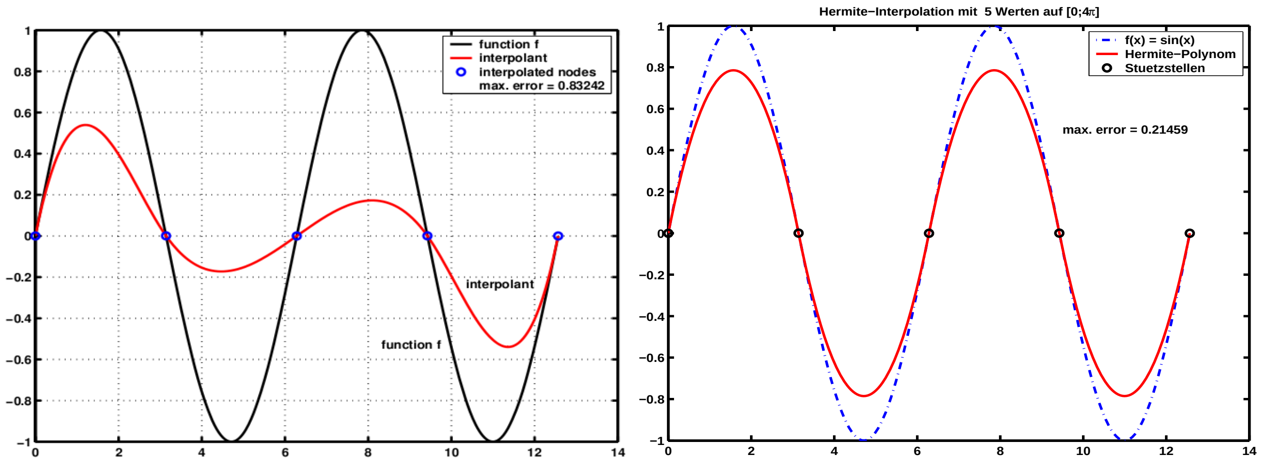

Abbildung 2: stückweise Polynominterpolation