

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 3. Übungsblatt: Interpolation

1) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Die zu interpolierenden Punkte sind:

$$\begin{aligned}x_0 &= -2, & y_0 &= -7 \\x_1 &= -1, & y_1 &= 0 \\x_2 &= 0, & y_2 &= 1 \\x_3 &= 2, & y_3 &= 9.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Auswertung des Algorithmus ($p[i, 0] = y_i$ ist ja klar):

$k = 1$:

$$\begin{aligned}p[0, 1] &= p[0, 0] + \frac{x - x[0]}{x[1] - x[0]} (p[1, 0] - p[0, 0]) = -7 + \frac{1 - (-2)}{-1 - (-2)} (0 - (-7)) = 14 \\p[1, 1] &= p[1, 0] + \frac{x - x[1]}{x[2] - x[1]} (p[2, 0] - p[1, 0]) = 0 + \frac{1 - (-1)}{0 - (-1)} (1 - 0) = 2 \\p[2, 1] &= p[2, 0] + \frac{x - x[2]}{x[3] - x[2]} (p[3, 0] - p[2, 0]) = 1 + \frac{1 - 0}{2 - 0} (9 - 1) = 5\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned}p[0, 2] &= p[0, 1] + \frac{x - x[0]}{x[2] - x[0]} (p[1, 1] - p[0, 1]) = 14 + \frac{1 - (-2)}{0 - (-2)} (2 - 14) = -4 \\p[1, 2] &= p[1, 1] + \frac{x - x[1]}{x[3] - x[1]} (p[2, 1] - p[1, 1]) = 2 + \frac{1 - (-1)}{2 - (-1)} (5 - 2) = 4\end{aligned}$$

$k = 3$:

$$p[0, 3] = p[0, 2] + \frac{x - x[0]}{x[3] - x[0]} (p[1, 2] - p[0, 2]) = -4 + \frac{1 - (-2)}{2 - (-2)} (4 - (-4)) = \boxed{2}$$

Für das Dreiecksschema erhält man somit:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
-2	0	$y_0 = -7$	\rightarrow 14	\rightarrow -4	\rightarrow 2
			\nearrow	\nearrow	\nearrow
-1	1	$y_1 = 0$	\rightarrow 2	\rightarrow 4	
			\nearrow	\nearrow	
0	2	$y_2 = 1$	\rightarrow 5		
			\nearrow		
2	3	$y_3 = 9$			

Der Wert von $p(x = 1)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = x^3 + 1$ an der Stelle $x = 1$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

Für das Dreiecksschema erhält man somit:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
-2	0	$y_0 = -7$	\rightarrow 21	\rightarrow -15	\rightarrow 9
-1	1	$y_1 = 0$	\rightarrow 3	\rightarrow 3	
0	2	$y_2 = 1$	\rightarrow 3		
1	3	$y_3 = 2$			

Der Wert von $p(x = 2)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = x^3 + 1$ an der Stelle $x = 2$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

2) Polynominterpolation nach Newton

a) Die zu interpolierenden Punkte sind:

$$\begin{aligned}x_0 &= -1, & y_0 &= -3 \\x_1 &= 1, & y_1 &= 1 \\x_2 &= 3, & y_2 &= -3.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Newtonschen dividierten Differenzen:

$$\begin{aligned}[x_0]f &= y_0 = -3 \\[x_1]f &= y_1 = 1 \\[x_2]f &= y_2 = -3 \\[x_0, x_1]f &= \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-3)}{1 - (-1)} = 2 \\[x_1, x_2]f &= \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{3 - 1} = -2 \\[x_0, x_1, x_2]f &= \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{-2 - 2}{3 - (-1)} = -1\end{aligned}$$

Im Dreiecksschema à la Aitken-Neville sieht das folgendermaßen aus:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
-1	0	$y_0 = \boxed{-3}$	→ $\boxed{2}$	→ $\boxed{-1}$
1	1	$y_1 = 1$	→ -2	
3	2	$y_2 = -3$		

Nützen wir nun die Werte $[x_0, \dots, x_i]f$ aus der obersten Zeile des Dreiecks als Koeffizienten des Polynoms in der Darstellung (4), so erhalten wir das Interpolationspolynom $p(x)$ zu

$$\begin{aligned}p(x) &= [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \dots + [x_0, \dots, x_n]f \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \\ &= \boxed{-3} + \boxed{2}(x - (-1)) + (\boxed{-1})(x - (-1))(x - 1) = \boxed{-x^2 + 2x}.\end{aligned}$$

- b) Ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, y_3) = (0, 0)$ lässt sich (unabhängig von seiner x -Position) einfach unten an das Newton-Schema anhängen. Man muss nur die noch fehlenden dividierten Differenzen berechnen:

$$\begin{aligned} [x_3]f &= y_3 = 0 \\ [x_2, x_3]f &= \frac{[x_3]f - [x_2]f}{x_3 - x_2} = \frac{0 - (-3)}{0 - 3} = -1 \\ [x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f}{x_3 - x_1} = \frac{-1 - (-2)}{0 - 1} = -1 \\ [x_0, x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} = \frac{-1 - (-1)}{0 - (-1)} = \boxed{0}. \end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
-1	0	$y_0 = -3$	→ 2	→ -1	→ 0
1	1	$y_1 = 1$	→ -2	→ -1	
3	2	$y_2 = -3$	→ -1		
0	3	$y_3 = 0$			

Der zusätzliche Term für $q(x)$ besteht dann aus $[x_0, x_1, x_2, x_3]f \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Dass dieser Anteil verschwindet, ist nötig, da der Zusatzpunkt $(0,0)$ auch schon auf dem ersten Interpolationspolynom $p(x)$ liegt! Deswegen muss aufgrund der Eindeutigkeit der Polynominterpolation $p(x) = q(x)$ gelten.

- c) Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet allgemein

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\}]$.

In unserem Fall ($x = 2$) ergibt sich speziell

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(2) - p(2)| = \left| \frac{D^4 f(\xi)}{4!} \cdot (2 - (-1))(2 - 0)(2 - 1)(2 - 3) \right| \\ &= \frac{1}{4} \cdot |D^4 f(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot \max_{x \in [-1, 3]} |D^4 f(x)| \end{aligned}$$

Anmerkung:

Wäre $f(x)$ bekannt, so ließe sich der Ausdruck $|D^4 f(x)|$ noch genauer abschätzen. Dies könnte zum Beispiel durch eine Kurvendiskussion von $D^4 f(x)$ geschehen, bei welcher man sämtliche lokalen Minima und Maxima im zu betrachtenden Intervall (in unserem Fall $[-1, 3]$) bestimmt. Hierbei darf man nicht vergessen, die beiden Werte an den Intervallrändern zu berücksichtigen, da diese ebenfalls Kandidaten für Extrema sind!

3) Bezier-Kurven und Computergrafik

a) Die Bernstein-Polynome sind (vgl. Abb. 2 der Angabe):

$$\begin{aligned}
 B_0(t) &= \frac{3!}{0! 3!} \cdot t^0(1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\
 B_1(t) &= \frac{3!}{1! 2!} \cdot t^1(1-t)^2 = 3t^3 - 6t^2 + 3t \\
 B_2(t) &= \frac{3!}{2! 1!} \cdot t^2(1-t)^1 = -3t^3 + 3t^2 \\
 B_3(t) &= \frac{3!}{3! 0!} \cdot t^3(1-t)^0 = t^3.
 \end{aligned}$$

b) Aufsummieren der 4 kubischen Bernstein-Polynome ergibt:

$$\begin{array}{cccc}
 -t^3 & +3t^2 & -3t & +1 \\
 3t^3 & -6t^2 & +3t & \\
 -3t^3 & +3t^2 & & \\
 t^3 & & & \\
 \hline
 0 & +0 & +0 & +1
 \end{array}$$

c) Es gilt:

$$s(0) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i \cdot B_i(0) = \mathbf{b}_0 \cdot 1$$

$$s(1) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i \cdot B_i(1) = \mathbf{b}_0(-1 + 3 - 3 + 1) + \mathbf{b}_1(3 - 6 + 3) + \mathbf{b}_2(-3 + 3) + \mathbf{b}_3 \cdot 1 = \mathbf{b}_3.$$

Die Ableitung der Kurve $s(t)$ nach ihrem Kurvenparameter t ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i \cdot B_i(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i \cdot \frac{dB_i(t)}{dt} \\
 &= \mathbf{b}_0(-3t^2 + 6t - 3) + \mathbf{b}_1(9t^2 - 12t + 3) + \mathbf{b}_2(-9t^2 + 6t) + \mathbf{b}_3(3t^2).
 \end{aligned}$$

Ausgewertet an der Stelle $t = 0$ bzw. $t = 1$ folgt daher

$$\left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=0} = -3\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=1} &= \mathbf{b}_0(-3 + 6 - 3) + \mathbf{b}_1(9 - 12 + 3) + \mathbf{b}_2(-9 + 6) + \mathbf{b}_3(3) \\
 &= -3\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Der Richtungsvektor (1) von $\tau(\alpha)_{\mathbf{b}_0}$ ist gerade 3 mal der Vektor $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$; damit liegt \mathbf{b}_1 auf der Geraden $\tau(\alpha)_{\mathbf{b}_0} = \mathbf{b}_0 + \alpha \cdot \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=0}$ mit $\alpha = 1/3$.

Analoges gilt für $\tau(\alpha)_{\mathbf{b}_3}$ mit dem Richtungsvektor (2):

\mathbf{b}_2 liegt auf der Geraden $\tau(\alpha)_{\mathbf{b}_3} = \mathbf{b}_3 + \alpha \cdot \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=1}$ mit $\alpha = -1/3$.