Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2013/2014

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 10. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE) II

1) Begriffe

a) **lokaler Diskretisierungsfehler:**

Größter Fehler, der durch die Verwendung des Differenzenquotentienten anstatt der Ableitung entsteht.
Lokaler Diskretisierungsfehler der Eulermethode:

$$l(\delta t) \; := \; \max_{a \le t \le b - \delta t} \left\{ \left| \frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t} - f(t, y(t)) \right| \right\}$$

Oft wird anstatt dieser eher unhandlichen Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers (der Eulermethode) eine andere (nicht äquivalente) Darstellung verwendet, die in der Praxis leichter handhabbar ist. Sie verwendet als lokalen Diskretisierungsfehler die Differenz zwischen analytischer und numerischer Lösung am Ende eines einzelnen Zeitschritts:

$$|y_{k+1} - y(t_{k+1})|,$$

wobei $y_k = y(t_k)$ gilt.

b) **globaler Diskretisierungsfehler:**

Größter Fehler zwischen den numerischen Approximationen y_k und den korrespondierenden analystischen Werten $y(t_k)$ zu konkreten Zeitpunkten t_k:

$$e(\delta t) \; := \; \max_{k=0,\dots,N} \{|y_k - y(t_k)|\}$$

Eine in der Praxis eher gebräuchliche (aber nicht äquivalente) Form des globalen Diskretisierungsfehlers betrachtet lediglich die Differenz zwischen numerischer und analytischer Lösung der Differentialgleichung am Ende des betrachteten Zeitintervalls (nach n Zeitschritten zum Endzeitpunkt $t = b$):

$$|y_n - y(t_n = b)|$$

wobei $y_0 = y(t_0)$ gilt.

c) **Konvergenz:**

Konvergiert die durch ein Lösungsverfahren erzeugte Folge mit immer kleiner werdender Schrittweite ($h \to 0$) gegen die exakte Lösung, so heißt dieses Lösungsverfahren *konvergent*.
Es gilt also:

$$\lim_{h\to 0, n\to\infty} y_k = y(t_k)$$

Der globale Fehler konvergiert folglich gegen 0.

d) **Konsistenz:**

Der Begriff der *Konsistenz* ist eng mit dem lokalen Diskretisierungsfehler verbunden. Falls für $\delta t \to 0$ der lokale Fehler $l(\delta t)$ gegen 0 konvergiert (also $l(\delta t) \to 0$), so heißt ein Verfahren *konsistent*.

e) **Stabilität:**

- *Stabilität* ist die Eigenschaft eines Verfahrens/Algorithmus.
- Ein Verfahren ist stabil, wenn es gegenüber kleinen Störungen der Eingabe unempfindlich ist.
- Summieren sich kleine lokale Fehler nur zu kleinen globalen Fehlern auf, so ist ein Verfahren stabil.

f) **Steifheit:**

Die Begriffe Konsistenz und Konvergenz sind eher analytischer Natur: Für ausreichend/beliebig kleine δt soll etwas passieren. Es gibt jedoch Differentialgleichungen, die konsistent bzw. konvergent sind, jedoch nur für sehr kleine δt. Ein zu kleines δt kann die Diskretisierung jedoch unpraktikabel machen.
Differentialgleichungen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *steif*.
Somit ist Steifheit eine Problemeigenschaft, die bei der numerischen Lösung der Differentialgleichung mit expliziten Einschrittverfahren die Verwendung einer sehr kleinen Schrittweite δt erzwingt, die für eine vorgegebene Genauigkeit in der Approximation eigentlich nicht nötig wäre.

Für die Beziehung zwischen Stabilität, Konsitenz und Konvergenz gilt bei den expliziten Verfahren:

- ESV: Konsistenz $\Rightarrow$ Konvergenz
- MSV: Konsistenz + Stabilität $\Leftrightarrow$ Konvergenz

2) Quadratur und AWP-Lösung

a) Die "dumme Rechtecksregel"

$$\int_a^b f(t)\ dt \quad \approx \quad (b-a)\cdot f(a)\ .$$

liefert direkt

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} - y_k &= \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{=\delta t} \cdot f(t_k, y_k) \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k) \ .
\end{aligned}
$$

b) Die Trapezregel lautet

$$
\int_a^b f(t)\ dt \ \approx \ (b-a) \cdot \frac{1}{2} \left[f(a) + f(b) \right] \ .
$$

Damit ergibt sich zunächst

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} - y_k &= \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{=\delta t} \cdot \frac{1}{2} \left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right] \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot \frac{1}{2} \left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right] \ . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Allerdings taucht in Glg. (1) nun auch auf der rechten Seite das noch unbekannte y_{k+1} auf. Um die Lösung einer (i.A.) nichtlinearen Gleichung zu vermeiden, approximiert man diesen Wert mit Hilfe eines einfach zu berechnenden anderen Verfahrens, wie z. B. des expliziten Euler-Verfahrens. So erhalten wir:

$$
y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \frac{1}{2} \left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \underbrace{y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)}_{\approx y_{k+1}}) \right] \ . \qquad (2)
$$

3) Euler-Verfahren und Zinsberechnung

a) Explizites Euler-Verfahren für das angegebene AWP:

$$
y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(y_k) \ .
$$

b) Ausgehend vom Startkapital y_0 soll mit $\delta t = 1$ das Startkapital plus Zinsen bei y_1 herauskommen. Die Zinsen für den Zeitraum eines Jahres sind $\delta t \cdot p/100 \cdot y_0$. Damit ergibt sich insgesamt:

$$
y_1 = y_0 + \delta t \cdot p/100 \cdot y_0 \ ,
$$

und die Funktion f der rechten Seite ist $f(y) = p/100 \cdot y$.

c) Die analytische Lösung des AWPs lautet $y(t) = y_0 e^{\frac{pt}{100}}$. Das erkennt man entweder schon direkt aus dem AWP oder rechnet es beispielsweise mit der Separation der Variablen nach ($\dot{y}(t) = p/100 \cdot y(t) \;=\; F(t) \cdot G(y)$ mit $F(t) = p/100$ und $G(y) = y$, sowie t_0=0):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\
\frac{dy}{G(y)} &= F(t)dt \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_{t_0}^{t} F(\tau) d\tau \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta &= \int_{t_0}^{t} \frac{p}{100}\, d\tau \\
ln(y) - ln(y_0) &= \frac{p}{100} \cdot t \\
y(t) &= y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}, \qquad t \in [0; b].
\end{aligned}$$

d) Wir verwenden nun 4 Schritte des Euler-Verfahrens zur kleineren Schrittweite $\delta t = 1/4$ (Jahr). Die Berechnungsvorschrift für y_{k+1} lautet dann:

$$y_{k+1} \;=\; y_k + \delta t \cdot \frac{p}{100} \cdot y_k \;=\; \left(1 + \frac{\delta t\; p}{100}\right) \cdot y_k .$$

Wenn wir diese Definition rekursiv einsetzen, so erhalten wir die explizite Formel zur direkten Berechnung von y_{k+1} aus y_0:

$$y_{k+1} \;=\; \left(1 + \frac{\delta t\; p}{100}\right) \cdot y_k \;=\; \left(1 + \frac{\delta t\; p}{100}\right)^2 \cdot y_{k-1} \;=\; \ldots \;=\; \left(1 + \frac{\delta t\; p}{100}\right)^{k+1} \cdot y_0 .$$

e) Für die konkreten Werte y_0=100000 Euro und $p = 2$ erhalten wir folgende Gesamtguthabenswerte y_{end} nach einem Jahr ($b = 1$):

$$\begin{aligned}
\text{Diga-Bank}: y_{\text{end}} &= 10^5 + 1 \cdot 2/100 \cdot 10^5 \;=\; 102000,00\ , \\
\text{Spaßkasse}: \; y_{\text{end}} &= y_4 \;=\; \left(1 + \frac{\frac{1}{4} \cdot 2}{100}\right)^4 \cdot 10^5 \;=\; 102015,05\ , \\
\text{Anal. Lsg.}: \; y_{\text{end}} &= 10^5 \cdot e^{\frac{2}{100}} \;=\; 102020,13\ .
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass mit ca. 15 Euro (0,015%) ein nicht unerheblicher Unterschied im Endkapital zwischen Diga und Spaßkasse vorliegt. Die Differenz der Spaßkasse zur analytischen Lösung beträgt nur etwa 5 Euro.

4) Instabilität der Mittelpunktsregel

a) Die analytische Lösung des AWPs lautet $y(t) = e^{-t}$. Das erkennt man entweder direkt aus dem AWP oder rechnet es beispielsweise mit der Separation der Variablen nach

$(\dot{y}(t) = -y(t) \;=\; F(t) \cdot G(y)$ mit $F(t) = 1$ und $G(y) = -y$, sowie $y(t_0 = 0) = 1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\
\frac{dy}{G(y)} &= F(t)dt \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_{t_0}^{t} F(\tau) d\tau \\
\int_{1}^{y} -\frac{1}{\eta} d\eta &= \int_{0}^{t} 1 \; d\tau \\
-ln(y) + ln(1) &= t \\
y(t) &= e^{-t}, \qquad t \in [0; b].
\end{aligned}$$

b) Für $N = 3$ und $\delta t = 2$ ergibt sich y_1 mit einem Startschritt des expliziten Euler-Verfahrens zu $y_1 = y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) \;=\; 1 + 2(-1) = -1$. Damit kann die Mittelpunktsregel als Zweischrittverfahren starten und ergibt:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_0 + 2\delta t \cdot f(t_1, y_1) &&= 1 - 2 \cdot 2(-1) = 5, \\
y_3 &= y_1 + 2\delta t \cdot f(t_2, y_2) &&= -1 - 2 \cdot 2(5) = -21.
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Werte betragsmäßig größer werden, aber das Vorzeichen wechselt. Dagegen beschreibt die analytische Lösung ein gleichmäßiges Abklingen gegen Null. Offensichtlich ist die Stabilitätsbedingung bei der Mittelpunktsregel hier verletzt.

c) Ein zu b) analoges Ergebnis erzielt man auch mit halb so großer Schrittweite $\delta t = 1$. Der Euler-Startschritt liefert $y_1 = y_0 + 1 \cdot (-y_0) = 0$. Damit berechnet man über die Vorschrift der Mittelpunktsregel:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_0 + 2\delta t \cdot f(t_1, y_1) &&= 1 - 2 \cdot 0 = 1 \;, \\
y_3 &= y_1 + 2\delta t \cdot f(t_2, y_2) &&= 0 - 2 \cdot 1 = -2 \;, \\
y_4 &= y_2 + 2\delta t \cdot f(t_3, y_3) &&= 1 - 2 \cdot (-2) = 5 \;, \\
y_5 &= y_3 + 2\delta t \cdot f(t_4, y_4) &&= -2 - 2 \cdot 5 = -12 \;, \\
y_6 &= y_4 + 2\delta t \cdot f(t_5, y_5) &&= 5 - 2 \cdot (-12) = 29 \;.
\end{aligned}$$

Die Instabilität lässt sich also nicht durch Verringerung der der Schrittweite beheben, sondern verschiebt lediglich den Zeitpunkt des Anschwellens der Werte nach hinten. Die Betrachtung weiterer Verfeinerungslevel mit Hilfe des matlab-Programms *vis_midpoint.m* macht dies nochmals deutlich (vgl. Abb. 1).

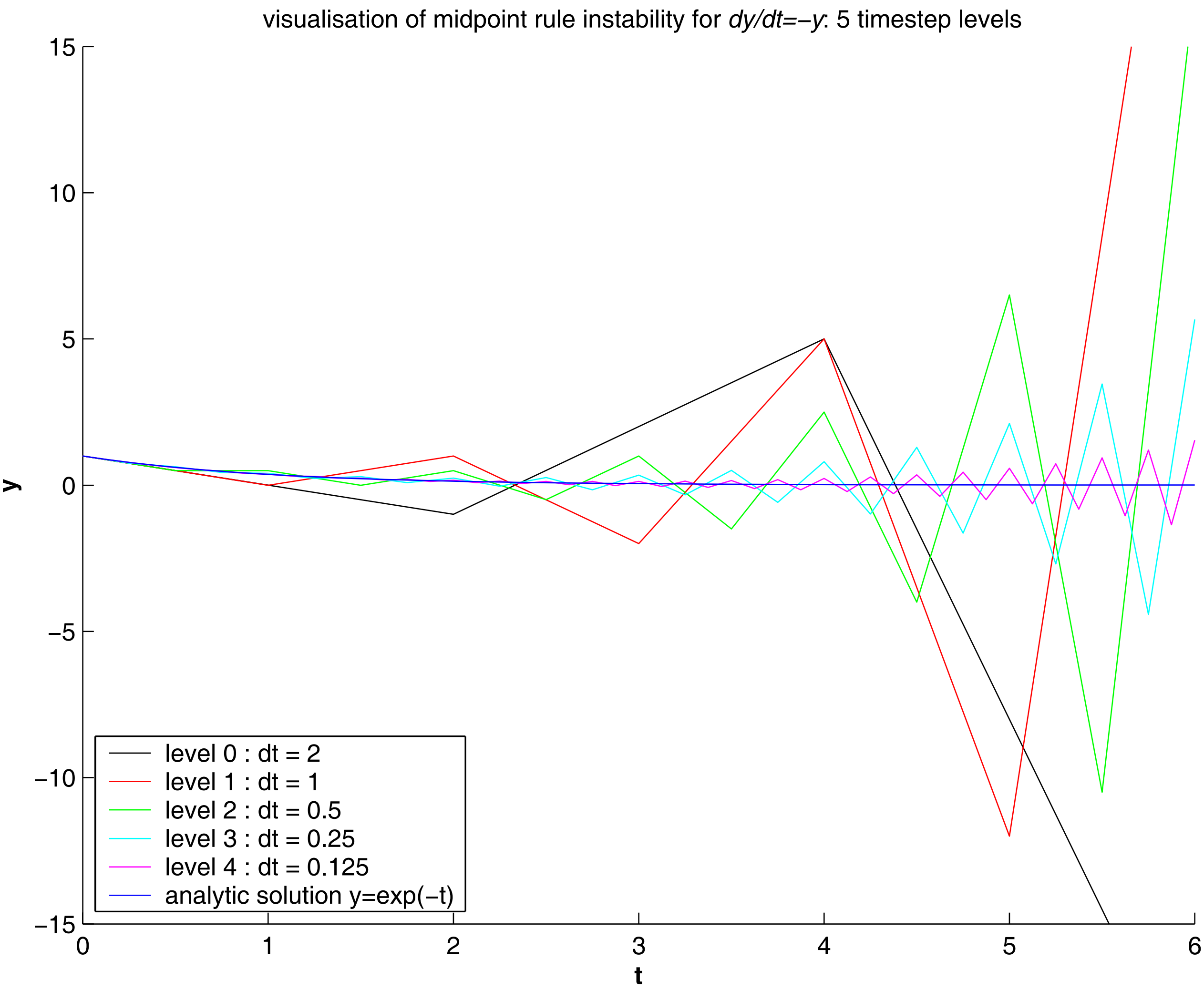

Abbildung 1: Visualisierung der Instabilität der Mittelpunktsregel: Fünf verschiedene Schrittweitenlevel und analytische Lösung.