Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dipl.-Inf. Christoph Riesinger
Dipl.-Math. Jürgen Bräckle

WS 2013/2014

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 12. Übungsblatt: Iterative Eigenwertlöser

1) Satz von Gerschgorin

Gerschgorinkreise für A:

$$\begin{aligned} |\lambda - 7| &\leq 4 \\ |\lambda - 5| &\leq 2 \\ |\lambda - 4| &\leq 1 \\ |\lambda - 3| &\leq 1 \end{aligned}$$

Damit liegen offensichtlich alle Eigenwerte $\lambda_1 \approx 8.5, \lambda_2 \approx 4.4, \lambda_3 \approx 3.6$ und $\lambda_1 \approx 2.5$ in mindestens einem der Gerschgorinkreise. Weiter können wir folgern:

A ist symmetrisch $\Rightarrow\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow\ \lambda \in [3, 11] \cup [3, 7] \cup [3, 5] \cup [2, 4] = [2, 11]$

$\Rightarrow A$ ist positiv definit $(\lambda > 0)$, A^{-1} existiert.

Abschätzung der Kondition von A bezüglich der Spektralnorm $||.||_2$:

$$\begin{aligned} \kappa_2(A) &= ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(A^{-T} A^{-1})} \\ &\overset{\text{Symmetrie}}{=} |\lambda_{\max}(A)| \cdot |\lambda_{\max}(A^{-1})| = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \leq \frac{11}{2} = 5.5. \end{aligned}$$

2) Iterationsverfahren

a) Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} det(A - \lambda I) \\ &= (3 - \lambda)^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \Rightarrow \lambda_i &= 3 \pm 1 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 4,\ \ \lambda_2 = 2$$

Bestimmung der Eigenvektoren durch Lösung der homogenen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I)\ v_i = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Mit Algorithmus aus der Vorlesung:

i)

$$\begin{aligned}
w_0 &= Ax_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\lambda^{(0)} &= x_0^T w_0 = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \\
x_1 &= \frac{w_0}{||w_0||_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_1 &= Ax_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\lambda^{(1)} &= x_1^T w_1 = \frac{36}{10} = 3.6 \\
x_2 &= \frac{w_1}{||w_1||_2}
\end{aligned}$$

$$\lambda^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 4$$

Konvergenzrate:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ii)

$$\begin{aligned}
w_0 &= (A - \mu I)x_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
\tilde{\lambda}^{(0)} &= x_0^T w_0 = \frac{3}{2} \\
x_1 &= \frac{w_0}{||w_0||_2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
w_1 &= (A - \mu I)x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 6 \end{pmatrix} \\
\tilde{\lambda}^{(1)} &= x_1^T w_1 = \frac{1}{13}(3,2) \cdot (\frac{13}{2}, 6)^T = \frac{63}{26} \approx 2.42 \\
\lambda^{(1)} &= \tilde{\lambda}^{(1)} + \mu \approx 3.92 \\
x_2 &= \frac{w_1}{||w_1||_2}
\end{aligned}$$

$$\lambda^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 4$$

Konvergenzrate:

$$\frac{\lambda_2-\mu}{\lambda_1-\mu} = \frac{0.5}{2.5} = \frac{1}{5}$$

iii)

$$\begin{aligned}
(A-\mu I) &= \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \\
w_0 &= (A-\mu I)x_0 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
\tilde{\lambda}^{(0)} &= x_0^T w_0 = \frac{-1}{2} \\
x_1 &= \frac{w_0}{||w_0||_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
w_1 &= (A-\mu I)x_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \\
\tilde{\lambda}^{(1)} &= x_1^T w_1 = \frac{1}{5}(\frac{-5}{2} - 4) = \frac{-13}{10} = -1.3 \\
\lambda^{(1)} &= \tilde{\lambda}^{(1)} + \mu = 2.2
\end{aligned}$$

$$\lambda^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 2$$

Konvergenzrate (kleinstes mit Shift durch größtes mit Shift):

$$\frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_2-\mu} = \frac{0.5}{-1.5} = \frac{-1}{3}.$$

Die Konvergenzrate wird (durch Beträge) natürlich eigentlich immer positiv angegeben

c)

$$\begin{aligned}
\mu < 3 \quad &\Rightarrow \quad \lambda^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 4 \\
\mu > 3 \quad &\Rightarrow \quad \lambda^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 2
\end{aligned}$$

Für $\mu = 3$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_1 &= (A - \mu I)x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
x_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_2 &= (A - \mu I)x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_0 \quad \Rightarrow \text{periodisch, keine Konvergenz!}
\end{aligned}$$