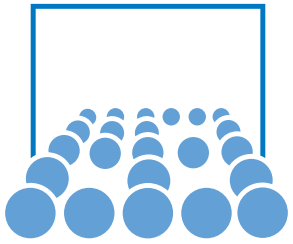
Informatics V - Scientific Computing

Numerisches Programmieren

Tutorübung 1

Jürgen Bräckle, Christoph Riesinger

28.Oktober 2013



Einführung in die Binärzahlen

Zahlendarstellung im Rechner

Rundungsfehler und ihre Folgen

Einführung in die Binärzahlen

Zahlendarstellung im Rechner

Rundungsfehler und ihre Folgen

Zahlendarstellung zur Basis B

- gewöhnlich mit $B \in \{2, 3, 10, 16\}$
- ganze Zahl x:

$$x = \sum_{i=0}^{N} r_i B^i$$

- mit Nachkommastellen:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{N} r_i B^i$$

mit $r_i \in \{0, \ldots, B-1\}$

Umrechnung von ganzen Zahlen

Umrechung der Zahl 26 ins Binärsystem

Wert des Bits	32	16	8	4	2	1
Binärzahl	0	1	1	0	1	0

			Rest
26	: 2 =	13	0
13	: 2 =	6	1
6	: 2 =	3	0
3	: 2 =	1	1
1	: 2 =	0	1

Umrechnung von Brüchen

am Beispiel $\frac{13}{4} = 111_3 : 11_3$ ins Trinärsystem.

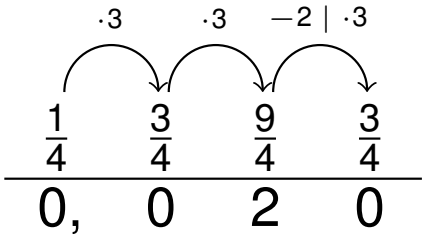
Schriftliches Dividieren

$$
\begin{array}{rcl}
111 & : & 11 = 10,\overline{02} \\
-11 & & \\
\text{--} & & \\
\quad 0100 & & \\
- \quad 22 & & \\
\quad \text{----} & & \\
\quad\ 001 & &
\end{array}
$$

Umrechnung von Brüchen

am Beispiel $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} = 10_3 + \frac{1}{4}$ ins Trinärsystem.

Alternativer Weg



$\Rightarrow \frac{13}{4} = 10,\overline{02}$

- Man gibt immer den ganzzahligen Anteil an
- Dieser Anteil wird in jeder neuen Zeile abgezogen
- Jede neue Zeile wird mit der Basis (hier 3) multipliziert
- Bsp: $(\frac{9}{4} - 2) \cdot 3 = \frac{3}{4}$

Einführung in die Binärzahlen

Zahlendarstellung im Rechner

Rundungsfehler und ihre Folgen

2-Komplement für ganze Zahlen

- Darstellung von negativen Zahlen bei fester Bit-Anzahl n
-

Stelle des Bits	1	2	3	...	n
Wert des Bits	-2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	...	2^0

- Beispiel: Darstellung der -5 mit $n = 4$

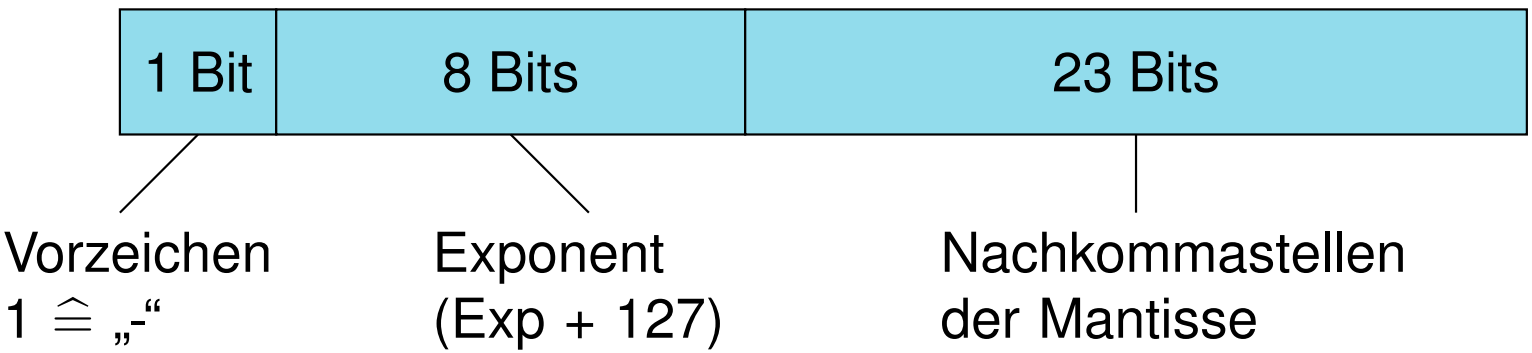
5 binär	0101
	↓
Invertiere	1010
	↓
Addiere 1	1011

Gleitkomma-Zahlen: 32-Bit IEEE-Standard

Ausgangspunkt:

- Festkommazahlen erlauben nur wenige darstellbare Zahlen
- Einführung einer normierten Exponentialdarstellung (Beispiel: $-1.11001 \cdot 2^{-56}$)

32-Bit IEEE-Standard:



Gleitkomma-Zahlen: Korrektes Runden

Rundung der Zahl

$$x = 1, x_1 x_2 \ldots x_{t-1} | x_t x_{t+1} \ldots$$

Vergleich der Zahl nach der Rundungsstelle $|x_t x_{t+1} \ldots$ mit der Wertigkeit der letzten verfügbaren Stelle $B^{-(t-1)}$:

- $|x_t x_{t+1} \ldots > \frac{1}{2} \cdot B^{-(t-1)} \rightarrow$ Aufrunden (1.2|502)
- $|x_t x_{t+1} \ldots < \frac{1}{2} \cdot B^{-(t-1)} \rightarrow$ Abrunden (1.2|317)
- $|x_t x_{t+1} \ldots = \frac{1}{2} \cdot B^{-(t-1)} \rightarrow$ Uneindeutiger Fall (1.2|5)

Gleitkomma-Zahlen: Korrektes Runden

Analoges Vorgehen im IEEE-Standard:

- $x = 1,0|\mathbf{101} \rightarrow$ Aufrunden (1.1)
- $x = 1,0|\mathbf{0}11 \rightarrow$ Abrunden (1.0)
- Uneindeutiger Fall $|x_t x_{t+1} x_{t+2} \ldots = 100\ldots$
  - $x = 1,\mathbf{1}|100 \rightarrow$ Aufrunden (10.0)
  - $x = 1,\mathbf{0}|100 \rightarrow$ Abrunden (1.0)

Fehler

- absoluter Fehler $f_{abs} := |x - \mathrm{rd}(x)|$
- relativer Fehler $f_{rel} := |\frac{x - \mathrm{rd}(x)}{x}|$

Fehler

- absoluter Fehler $f_{abs} := |x - \mathrm{rd}(x)|$
- relativer Fehler $f_{rel} := |\frac{x - \mathrm{rd}(x)}{x}|$

Maschinengenauigkeit ε_M

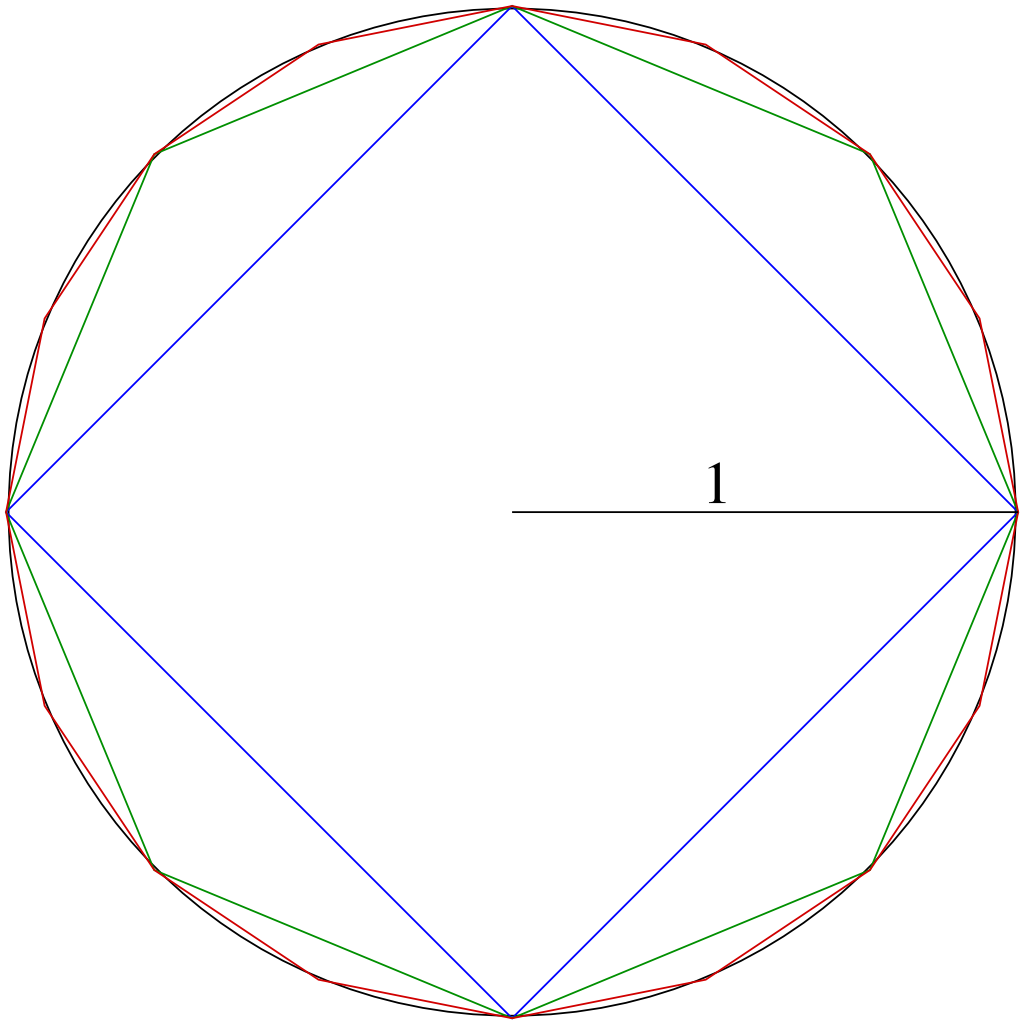
- bei Rundung mit t-stelliger Mantisse $\Rightarrow \varepsilon_M = 2^{-t}$
- größte positive Zahl ε_M mit $\mathrm{rd}(1 + \varepsilon_M) = 1$

Einführung in die Binärzahlen

Zahlendarstellung im Rechner

Rundungsfehler und ihre Folgen

Ermittlung von π nach Archimedes



Ermittlung von π nach Archimedes