Numerisches Programmieren 2013/14

Christoph Riesinger, Jürgen Bräckle

03. - 06. Februar 2013

Topics

- Maschinenzahlen
- Interpolation
- Numerische Integration
- Fouriertransformation
- Lineare Gleichungssysteme
- Gewöhnliche Differentialgleichungen

Maschinenzahlen

Fließkommazahlen

$$\mathbb{F}_{B,t} := \left\{ M \cdot B^{E} : M = 0 \text{ or } B^{t-1} \leq \mid M \mid < B^{t}; M, E \in \mathbb{Z} \right\}$$

- M: Mantisse
- E: Exponent
- B: Basis (binär, oktal, dezimal, hexadezimal)
- t: Anzahl der Digitalstellen

weitere Aspekte

- Rundungsfehler (relativ/absolut)
- Rechnen mit Maschinenzahlen (starke/schwache Hypothese)
- Kondition & Stabilität
- Auslöschung

Interpolation

Begriffe

- Stützstellen
- Stützwerte
- Stützpunkte

1. Möglichkeit der Unterteilung

- **Polynom-Interpolation**
  Jeder Stützstelle x_i ist nur eine Information, der Stützwert y_i zugeordnet.
- **Hermite-Interpolation**
  Jeder Stützstelle x_i sind mehrere Informationen wie Stützwert y_i, Steigung y_i' und/oder Krümmung y_i'' zugeordnet.

Interpolation (fort.)

2. Möglichkeit der Unterteilung

Art der Interpolation	Beispiele
Polynominterpolation	Lagrange-Polynom Aitken-Neville dividierte Differenzen/Newton
stückweise Interpolation	Polygonzug quadratische Splines kubische Splines
trigonometrische Interpolation	diskrete Fouriertransformation schnelle Fouriertransformation

Wissenswertes

- $n + 1$ Stützstellen definieren eindeutig ein Polynom vom Grad n
- Für Polynominterpolation spielt die Reihenfolge der Stützstellen *keine* Rolle

Numerische Integration

Grundprinzip

- Zu integrierende, analytische Funktion mit anderer, sehr einfach zu integrierender Funktion (z.B. Polynom) approximieren
- Einfach zu integrierende Funktion exakt integrieren

Numerische Integration (fort.)

Quadratur

- einfache Regeln
  - Rechtecksregel
  - Trapezregel
  - Kepler-Regel
- zusammengesetzte Regeln
  - Trapezsumme
  - Simpsonsumme
- Extrapolation
  - Romberg-Verfahren
- Monte Carlo Methoden
- Gauß-Quadratur
- Verfahren nach Archimedes

Numerische Integration (fort.)

Restglied Trapezsumme

$$R_{\text{TS}}(f;h) \;=\; h^2 \cdot (b-a) \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12}$$

Restglied Simpsonsumme

$$R_{\text{SS}}(f;h) \;=\; h^4 \cdot (b-a) \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{180}$$

Restglied Gaußquadratur

$$R_{\text{GQ}}(f;h) \;=\; \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi)$$

Fouriertransformation

Grundlagen

- Komplexe Zahlen
- *n*-te Einheitswurzeln

Diskrete Fouriertransformation (DFT) ($\mathcal{O}(n^2)$)

(mind.) Zweierlei Interpretationen möglich:

- Interpolation durch ein (komplexwertiges) Polynom mit den *n*-ten Einheitswurzeln als Stützstellen
- Transformation: räumliche/zeitliche Domäne $\Leftrightarrow$ Frequenzspektrum

Fouriertransformation (fort.)

DFT

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot e^{-i \frac{2\pi}{n} jk}$$

IDFT

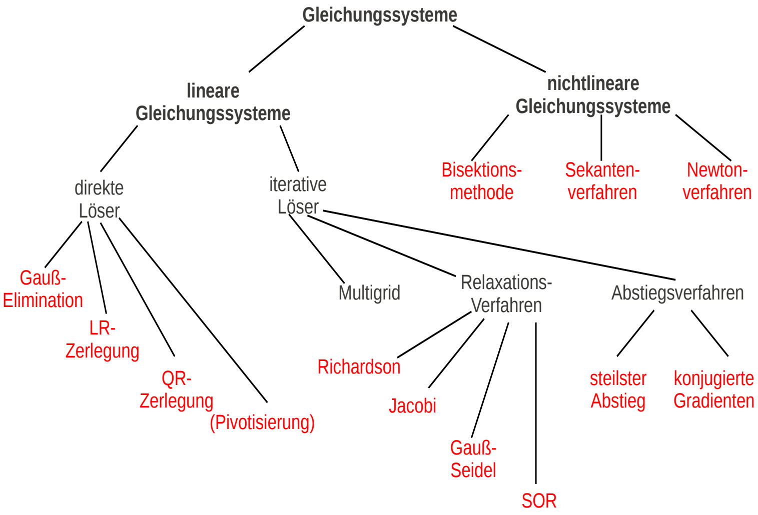
$$v_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot e^{i \frac{2\pi}{n} jk}$$

Schnelle Fouriertransformation (FFT) ($\mathcal{O}(n \log n)$)

Ablauf in zwei Phasen:

- Sortierphase
- Kombinationsphase (Butterfly-Operator)

Lineare Gleichungssysteme



Gewöhnliche Differentialgleichungen

Was sind Differentialgleichungen?

Eine Differentialgleichung ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion, die von einer oder mehreren Variablen abhängt und in den Ableitungen der Funktion enthalten sind.

Randbedingungen für Differentialgleichungen

- Anfangswertprobleme (AWP)
- Randwertprobleme (RWP)

Begriffe

- lokaler/globaler Diskretisierungsfehler
- Konsistenz/Konvergenz
- Steifheit

Gewöhnliche Differentialgleichungen (fort.)