Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers, Dr. Rudolph Triebel
Nikola Tchipev, Felix Dietrich

WiSe 2015

Numerisches Programmieren, Übungen

2. Übungsblatt: Kondition und Stabilität

1) Kondition

Anhand der "Kondition" beschreibt man die Abhängigkeit der Ausgabedaten von einer Störung der Eingabedaten eines Problems. Sie ist eher ein qualitativer Begriff - man redet von "guter" oder "schlechter" Kondition eines Problems.

Die "Konditionszahl" stellt ein qualitatives Maß dafür dar und entspricht dem asymptotisch ungünstigsten Faktor um den Störungen der Eingabe in der Ausgabe verstärkt werden.

Die (relative) Konditionszahl $cond(f,x)$ für reellwertige Funktionen f ist definiert als:

$$cond(f,x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|.$$

Berechnen Sie die relative Konditionszahl der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von x:

i) $f_1(x) = a \cdot x$, ii) $f_2(x) = \dfrac{a-x}{b}$, iii) $f_3(x) = 3e^x - 3$.

Interpretieren Sie jeweils das Ergebnis!

Wie lautet die Konditionszahl von f_3 an der Stelle $x = 0$ (Grenzwertbetrachtung!)?

2) Beispiel für schlechte Kondition: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1 : y = x$$
$$g_2 : y = mx + 1,$$

deren Schnittpunkt berechnet werden soll. Der tatsächliche Eingabe-Parameter $m = 1.005$ wird dabei zu $\tilde{m} = 1.01$ aufgerundet. Wir wollen nun den dadurch entstandenen Fehler im x-Wert des Schnittpunktes untersuchen.

a) Berechnen Sie den x-Wert des Schnittpunktes für ein allgemeines m, und stellen Sie diese Beziehung als Funktion $x = f(m)$ dar.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl des Problems aus a) an der gegebenen Stelle m.

c) Wie sieht die tatsächliche Verstärkung des relativen Eingabefehlers aus?

3) Stabilität

Betrachten wir kurz nochmals die Menge G vom Übungsblatt 1 (1 Bit Vorzeichen, 5 Bits Exponent, 2+1 Bits Mantisse). Es gilt $1, 3, 8 \in G$, aber $1 + 8 = 9 \notin G$ und $3 \cdot 3 = 9 \notin G$. Es kommt oft vor, dass die Ausgabe einer (auch sehr einfachen) Operation op nicht in der Menge der Maschinenzahlen ist und dadurch eine Rundung benötigt:

$$\mathrm{rd}_G(1+8) = \mathrm{rd}_G(9) = \mathrm{rd}_G(2^3 \cdot 1,0\mathbf{0}|100_2) = 2^3 \cdot 1,00_2 = 8.$$

Dadurch muss potenziell nach jeder Zwischenausgabe gerundet werden.

Ein *Verfahren* heißt *stabil*, wenn Rundungen von Zwischenergebnissen nicht zu einer große Abweichung der Endergebnisse führen; ansonsten heißt es *instabil*. Um das Stabilitätsverhalten eines Verfahrens zu analysieren, verwenden wir *Epsilontik*.

Im Übungsblatt 1 haben wir gesehen, dass bei rd_G immer ein relativer Fehler $\leq \varepsilon_{Ma}$ entsteht:

$$\left| \frac{\mathrm{rd}_G(x) - x}{x} \right| \leq \varepsilon_{Ma}. \tag{1}$$

Das heißt, man kann immer ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, finden, damit

$$\mathrm{rd}_G(x) = (1+\varepsilon)x, \tag{2}$$
$$-\varepsilon_{Ma} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{Ma} \tag{3}$$

gelten. Diese Eigenschaft verwenden wir bei der Epsilontik. Wir untersuchen den relativen Endergebnisfehler $\left| \frac{\mathrm{rd}(f)(x) - f(x)}{f(x)} \right|$ anhand folgender Regeln:

- Bei der Ausführung jeder Maschinenoperation op_M wird einen neuen relativen Fehler ε_i erzeugt:
$$(a \,\mathrm{op}_M\, b) = \mathrm{rd}_M(a \,\mathrm{op}\, b) = (a \,\mathrm{op}\, b) \cdot (1 + \varepsilon_i) \text{ mit } |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{Ma}.$$
- Terme höheren Ordnung werden vernachlässigt: $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \doteq 0 \quad \forall i, j$.

Untersuchen Sie die Stabilität von den Funktionen

i) $f_1(x) = a \cdot x$, ii) $f_2(x) = \dfrac{a-x}{b}$, iii) $f_3(x) = 3e^x - 3$.

mit Hilfe der Epsilontik. Hier nehmen wir an, dass die Eingabe x schon eine Gleitkommazahl ist und keine Rundung benötigt ($\mathrm{rd}(x) = x$). Die Auswertung von e^x erzeuge auch nur einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_{Ma}$.

4) Ermittlung von π nach Archimedes

Viele mathematische und naturwissenschaftliche Probleme können nicht oder nur schwer durch Angabe einer direkten Lösungsformel gelöst werden, stattdessen ist aber oftmals eine schrittweise Annäherung an die exakte Lösung möglich. Solche sogenannten iterativen Approximationen lassen sich meist algorithmisch beschreiben und in ein Computer-Programm umsetzen. Dabei ist allerdings große Sorgfalt geboten, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Ein klassisches Beispiel für die iterative Approximation ist die Bestimmung der Kreiszahl π. Eines der ersten bekannten Verfahren geht auf Archimedes von Syrakus (um 250 v.Chr.) zurück. Die Formel Kreisumfang gleich zweimal Kreisradius mal π war Archimedes bereits bekannt. Durch immer genauere Approximation des Umfangs eines Kreises mit Radius eins mit Hilfe von in den Kreis einbeschriebenen Polygonen konnte er somit π approximieren. Für ihn war das eine mühselige Arbeit mit Tinte und Papyrus, wir können das heute dank Computer im Bruchteil einer Sekunde erledigen.

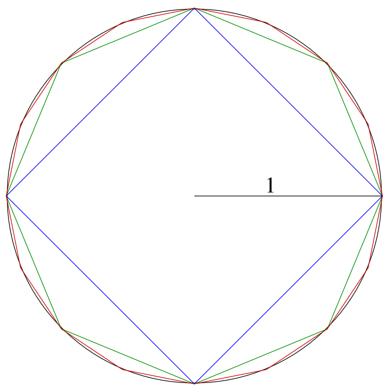

Abbildung 1: Einheitskreis und einbeschriebene Polygone

Die von Archimedes entwickelte Formel (siehe letzte Zusatzaufgabe) sah möglicherweise folgendermaßen aus:

$$s_1 = 2, \qquad s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}, \tag{4}$$

mit s_n der Seitenlänge des 2^n-Ecks. Der gesamte Umfang des 2^n-Ecks ergibt sich somit zu

$$U_n = 2^n \cdot s_n \approx 2\pi$$

und damit also

$$\pi_n = U_n/2 = 2^{n-1} \cdot s_n.$$

Zum Beispiel $\pi_1 = 2,\ \pi_2 = 2\sqrt{2}$ usw.

Aufgabe Mit Formel (4) für die Seitenlänge der Polygone lassen sich nun schrittweise Näherungen für π berechnen. Berechnen Sie den Fehler $\|\pi_n - \pi\|$ bis $n = 30$. Was beobachten Sie? Beheben Sie das Problem!

Zusatzaufgabe) Klausuraufgabe SoSe 2014

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(x+1)$, definitert für $x > -1$. Untersuchen Sie die Konditionszahl und die Stabilität von f für:

i) $x \to -1$

ii) $x \to 0$

Die Auswertung von $\ln(x)$ erzeuge auch nur einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_{Ma}$. Die Eingabe x ist schon gerundet ($\mathrm{rd}(x) = x$).