

Numerisches Programmieren, Übungen

5. Übungsblatt: Interpolation

1) Interpolation mit unterschiedliche Basisfunktionen

Die Ausgabewerte einer unbekanntes Funktion f sind an den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ gegeben: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Im folgenden untersuchen wir Schätzungen für $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Geben Sie

- das lineare Gleichungssystem für die Interpolation,
- die Interpolationsfunktion G ,
- die Schätzung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)$,

für

- a) die Polynom-Basisfunktionen

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2,$$

(Bestimmen Sie, dass die Lösung $(c_0 \ c_1 \ c_2)^T = (3 \ -5 \ 2)^T$ ist.)

- b) die folgende "trigonometrische" Basisfunktionen

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad g_2(x) = \cos(\pi x),$$

(Bestimmen Sie, dass $(1 \ 1 \ 1)^T$ die Lösung ist.)

- c) die Tchebycheff-Polynom-Basisfunktionen

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = 2x^2 - 1,$$

(Bestimmen Sie, dass $(4 \ -5 \ 1)^T$ die Lösung ist.)

- d) die Lagrange-Basispolynomen l_0, l_1, l_2 für x_0, x_1, x_2 (berechnen Sie den zuerst):

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Vergleichen Sie Ihre Antworten zu a), c) und d).

2) Polynominterpolation nach Newton

Die Newtonschen dividierten Differenzen bieten eine effiziente Möglichkeit, ein Interpolationspolynom $p(x)$ analytisch zu beschreiben (d.h. seine Koeffizienten zu berechnen). Mit zu interpolierenden Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$ gelten die folgenden Formeln aus der Vorlesung:

$$[x_i]f = f(x_i) \quad (1)$$

$$[x_i, \dots, x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}. \quad (2)$$

Man ordnet die dividierten Differenzen in ein Dreiecksschema:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	...
x_0	0	$[x_0]f$	$\rightarrow [x_0, x_1]f$	$\rightarrow [x_0, x_1, x_2]f$	$\rightarrow \dots$
x_1	1	$[x_1]f$	$\rightarrow [x_1, x_2]f$	$\rightarrow \vdots$	
x_2	2	$[x_2]f$	$\rightarrow \vdots$		
\vdots	\vdots	\vdots			

Damit kann man in der ersten Zeile direkt die Koeffizienten $[x_0, \dots, x_{i+k}]f$ des Interpolationspolynoms $p(x)$ in der folgenden Gestalt ablesen:

$$p(x) = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + \dots + [x_0, \dots, x_n]f \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i). \quad (3)$$

In dieser Aufgabe soll zu den Punkten aus Aufgabe 1)

$$P_0 = (0, 3), P_1 = (1, 0) \text{ und } P_2 = (2, 1)$$

ein Interpolationspolynom bestimmt werden.

- a) Berechnen Sie die Newtonschen dividierten Differenzen für das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den Gleichungen (1) - (2). Stellen Sie dazu auch das Dreiecksschema auf und berechnen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel (3)!
- b) Nun soll ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ zur Interpolation hinzugenommen werden. Berechnen Sie die noch fehlenden dividierten Differenzen, erweitern Sie das Dreiecksschema aus Teilaufgabe b) und geben Sie die Koeffizienten des neuen Gesamtpolynoms $q(x)$ nach Formel (3) an!

3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Das Aitken-Neville Verfahren gibt uns eine Möglichkeit das Interpolationspolynom zu den Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$ **direkt an einer Stelle x auszuwerten**, ohne die tatsächliche Koeffizienten des Polynomes zu berechnen:

```

for i=0:n; p[i,0]:=f_x[i]; end
for k=1:n
  for i=0:n-k
    p[i,k] := p[i,k-1] + (x-x[i])/(x[i+k]-x[i])*(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]);
  end
end
end

```

Die sukzessive Berechnung der $p[i, k]$ ist hier im Vergleich zur Vorlesungsfolie äquivalent umgeformt und kann wieder mit einem Dreiecksschema veranschaulicht werden:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	...
x_0	0	$p[0,0] = y_0$	$\rightarrow p[0,1]$	$\rightarrow p[0,2]$	$\rightarrow \dots$
			\nearrow	\nearrow	
x_1	1	$p[1,0] = y_1$	$\rightarrow p[1,1]$	$\rightarrow \vdots$	
			\nearrow		
x_2	2	$p[2,0] = y_2$	$\rightarrow \vdots$		
\vdots	\vdots	\vdots			

Der Wert des Polynoms $p(x)$ an der Stelle x steht nach Abschluss des Algorithmus' in $p[0, n]$.

Berechnen Sie den Wert des quadratischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 0.5$ für die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aus Aufgabe 2) mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

4) Fehlerabschätzung

Im Abbildung 1 links ist die tatsächliche Funktion f gezeichnet.

- Zeichnen Sie das berechnete Interpolationspolynom von 1) dazu. Wie groß ist der Fehler an der Stelle $x = 0.5$?
- Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\}]$. Werten Sie den Fehler an der Stelle $x = 0.5$ aus! Verwenden Sie dazu

$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^3 f(\xi)| = 35.43,$$

$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^4 f(\xi)| = 107.53.$$

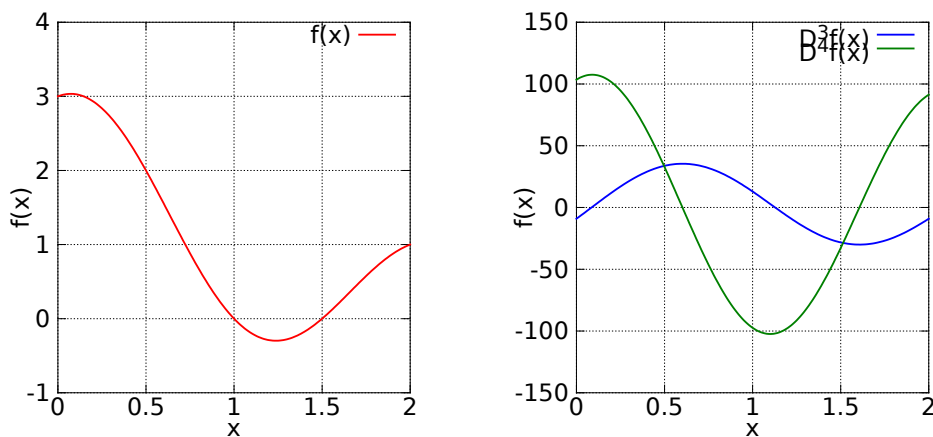


Abbildung 1: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.