

## Anwendungsbeispiel:

### Räuber-Beute-Modell

Einfaches Modell, das die Populationsänderung in einem ‚Primitiv-Ökosystem‘, bestehend aus genau einer Räuberspezies und einer Beutespezies, beschreibt.

Viele Räuber → Beute nimmt ab

Wenig Räuber → Beute nimmt zu

Viel Beute → Räuber nehmen zu

Wenig Beute → Räuber nehmen ab

Änderung der Anzahl Beutetiere  $x(t)$  ist zum einen durch die Geburtenrate  $a$  proportional der Anzahl Beutetiere, und zum anderen führt eine Begegnung eines Beutetiers mit einem Räuber ( $y(t)$ ) zu einer Verringerung (mit Sterberate  $b$ ):

$$\dot{x}(t) = ax - byx$$

Andererseits erhöht sich die Räuber-Geburtenrate durch viele Beutetiere, während die Abnahme der Räuber von ihrer Sterberate  $d$  abhängt:

$$\dot{y}(t) = cxy - dy$$

Man erhält also zur Beschreibung der zeitlichen Änderung der Population von Räuber und Beute ein DGL-System:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

für  $t_0 \leq t \leq t_n$

$$\dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t)$$

mit Startwerten  $x(t_0) = x_0$  und  $y(t_0) = y_0$

Eulerverfahren mit Schrittweite  $\tau$  liefert dafür die Formel:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau} = ax_i - bx_i y_i$$

oder

$$x_{i+1} = x_i + \tau (ax_i - bx_i y_i)$$

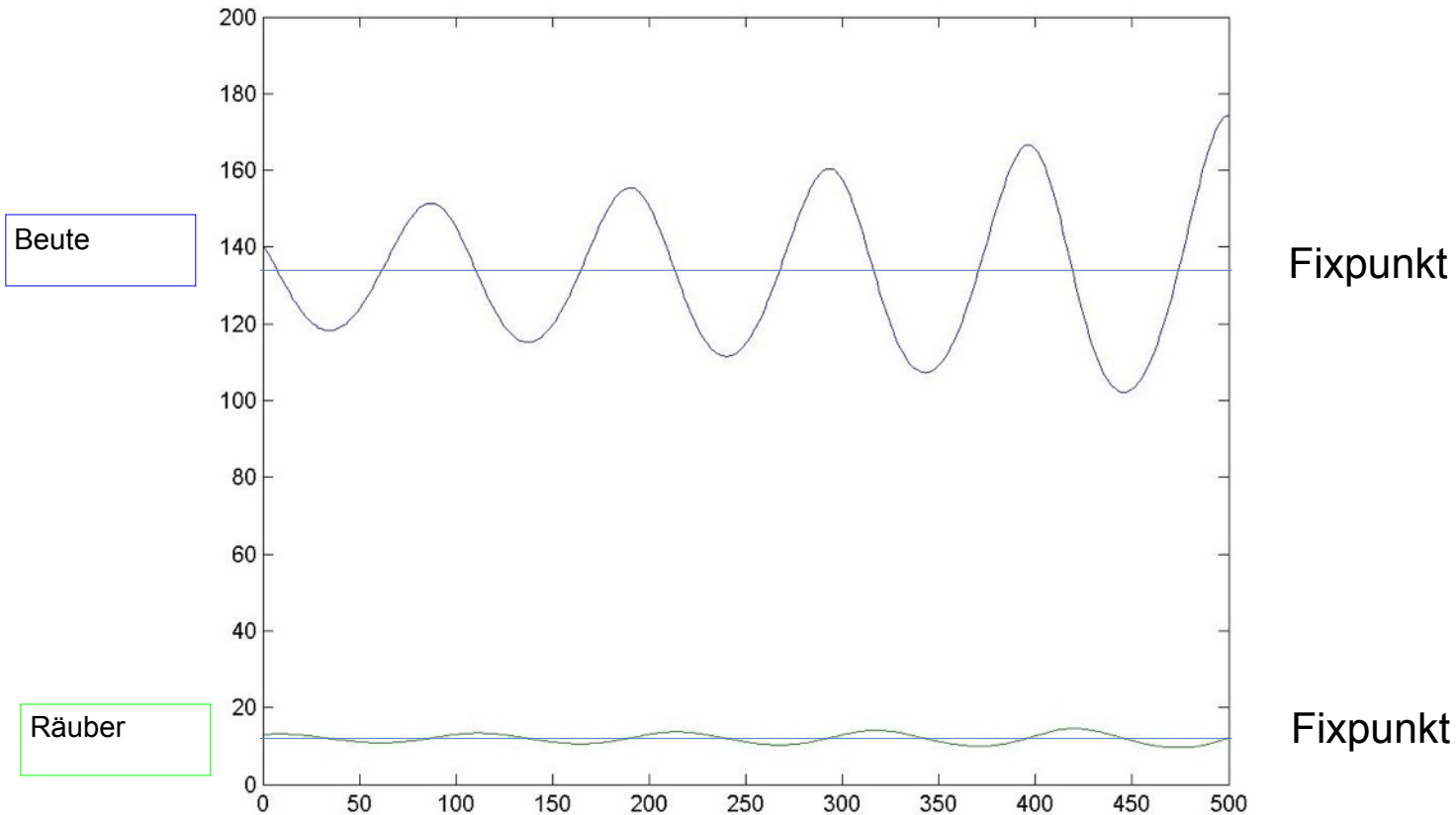
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = cx_i y_i - dy_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \tau (cx_i y_i - dy_i)$$

Fixpunkte dieser Vektoriteration:  $(x, y) = (d/c, a/b)$

# Populationsverlauf:

Parameter:  $a=.3$ ,  $b=.025$ ,  $c=.0015$ ,  $d=.2$



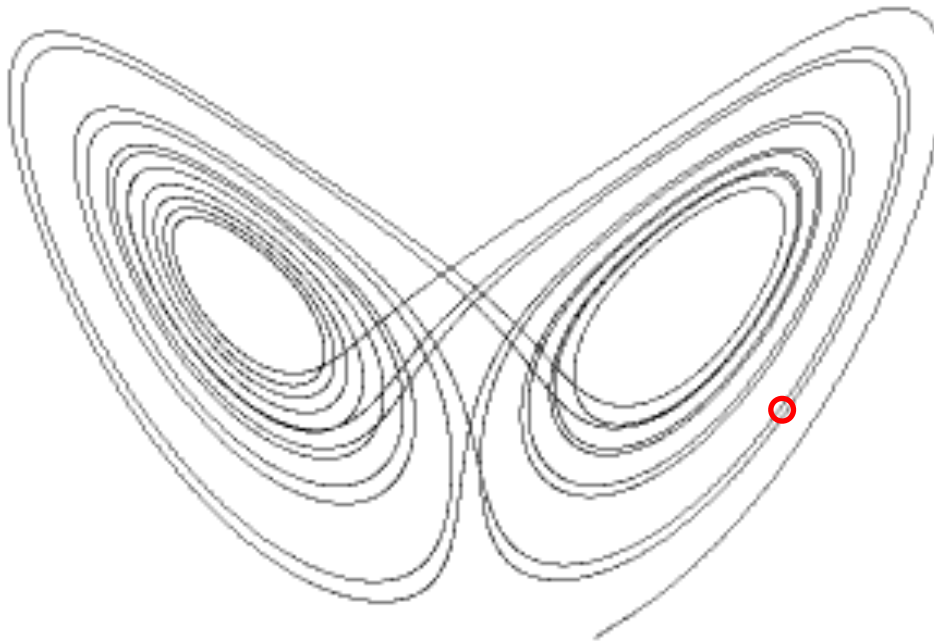
<http://www.leinweb.com/snackbar/wator/>

## Beispiel: Lorenzattraktor

Diff'gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1' &= a(x_2 - x_1) \\x_2' &= bx_1 - x_2 - x_1x_3 \\x_3' &= x_1x_2 - cx_3\end{aligned}$$

aus Modell für Beschreibung der Luftzirkulation in der Erdatmosphäre.



Wie bei der logistischen Parabel existieren zwei Attraktoren, zwischen denen die Lösungskurve chaotisch wechselt.

Daher führt eine minimale Änderung, z.B. der Anfangsdaten dazu, dass nach kurzer Zeit die Lösung sich an einer völlig anderen Position befindet

Der ‚Flügelschlag eines Schmetterlings‘ in China genügt, um nach einiger Zeit zu einer völlig anderen Lösung zu führen, z.B. einen Sturm in Europa auszulösen.

Daher ist es prinzipiell unmöglich, über längeren Zeitraum exakte Vorhersagen zu gewinnen, da leichteste Änderungen in den Anfangsdaten zu gänzlich anderem Lösungsverhalten führen.

Chaotisches Verhalten!

## Beispiel für chaotisches Verhalten:

Logistische Parabel, Iteration mit Startwert  $x_0 \in [0, 1]$  und Funktion

$$\Phi(x) := 4 \cdot x \cdot (1 - x)$$

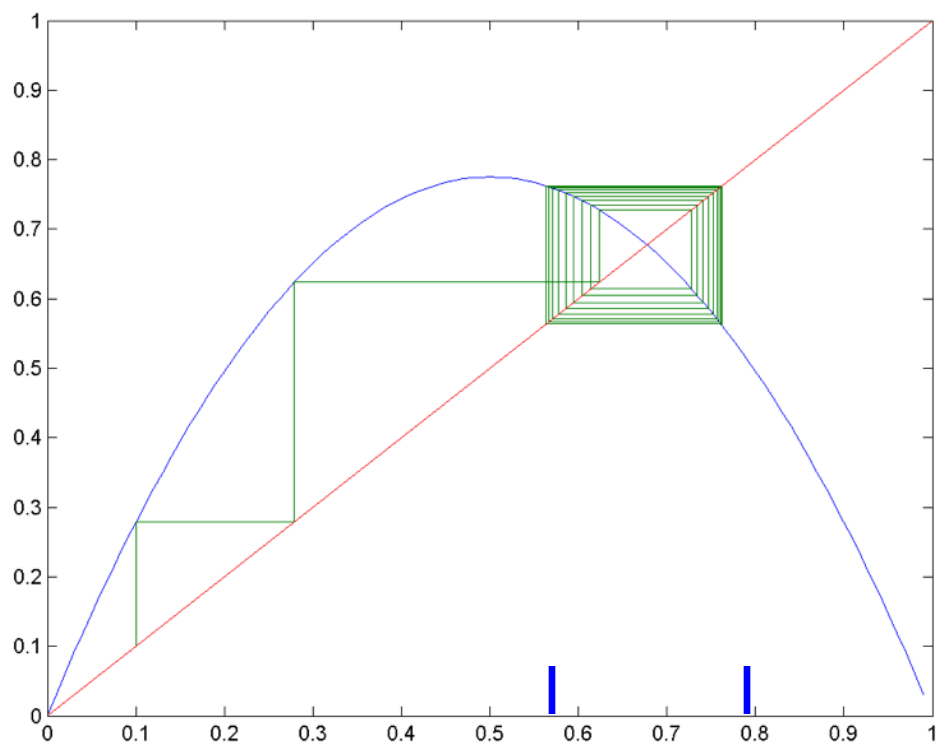
Vergleiche Orbit bei Startwert  $x_0$  mit Orbit für Startwert  
 $y_0 = x_0 + 10^{-16}$

Numerisches Ergebnis in MATLAB:

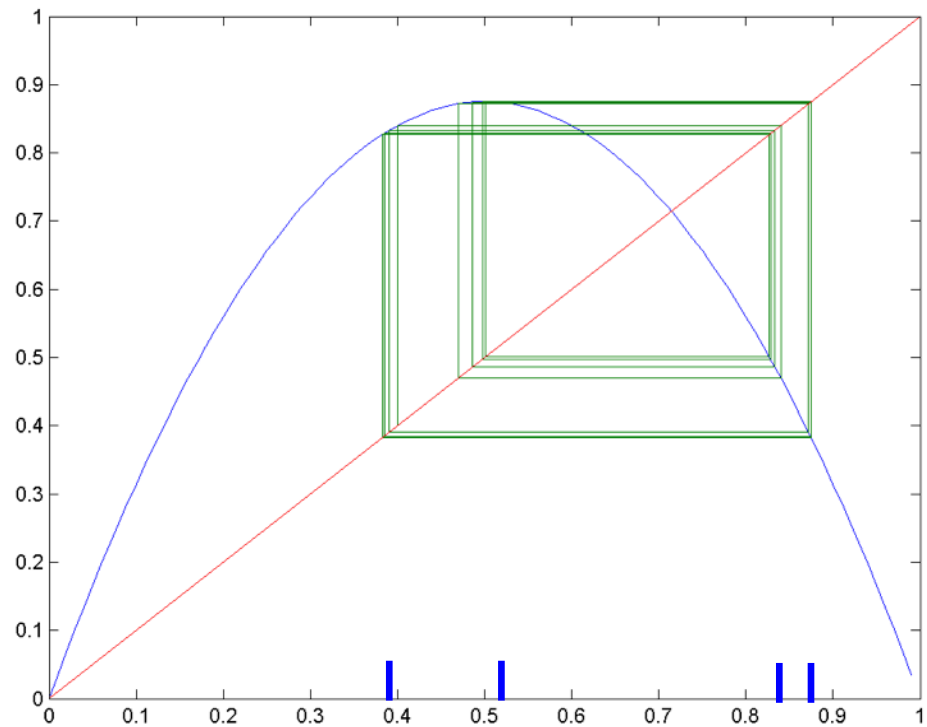
$x_0 = 0.999999999$  liefert

$x_{44} = 0.0209$       und       $y_{44} = 0.9994$

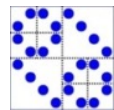




$\alpha=3.1$



$\alpha=3.5$

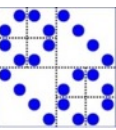


Grund: Wiederholte Auslöschung

Chaos  $\leftarrow \rightarrow$  Schlecht konditioniert

Beispiel Wintersturm Lothar:  
Ignorieren eines Messwertes  $\rightarrow$  Falsche Wetterprognose

# Partielle Differentialgleichungen



# Notation:

Nabla-Operator  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient  $f(x, y, z): \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}: \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} =$   
 $= f_x + g_y + h_z = \text{div}(F)$

## Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad}(U)) = \nabla(\nabla U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} U + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$

Beispiel Diffusion (mit Anwendung in der Bildverarbeitung):

Die Strömung  $j$  – hervorgerufen durch Dichteunterschiede – erfolgt in Richtung des negativen Gradienten der Konzentration  $u \rightarrow$

$$j(x, t) = -D \cdot \nabla u(x, t)$$

Massenerhaltung: Änderung der Konzentration in einem Volumenelement kann nur durch Strömung erfolgen  $\rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\operatorname{div}(j) = -\frac{\partial j_1}{\partial x_1} - \frac{\partial j_2}{\partial x_2} - \frac{\partial j_3}{\partial x_3}$$

Zusammen:

$$u_t = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u)$$

Im isotropen Fall ist  $D$  eine konstante Zahl, z.B.  $D=1$ :

$$u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

im zweidimensionalen Fall;

$\Delta$  heißt Laplace-Operator.

## Einteilung Partieller Diff'gleichungen:

Gleichgewichtsgl. (elliptische PDE) für  $u(x,y)$ :

$$-\Delta u = f$$

Wärmeleitungsgl. (parabolische PDE) für  $u(x,t)$ :

$$\Delta u = u_t$$

Hier: Laplace-Operator  
nur für räumliche  
Ableitungen!

Wellengleichung (hyperbolische PDE):

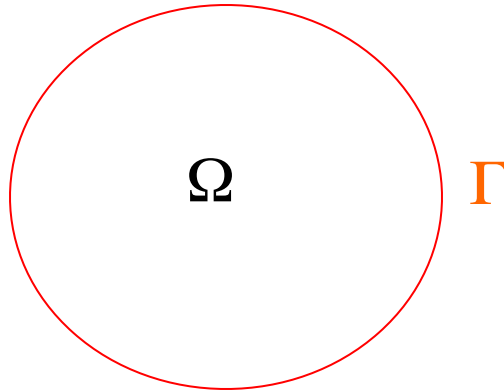
$$\Delta u = u_{tt}$$



Elliptische PDE: Gegeben sind zusätzlich Randwerte.



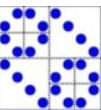
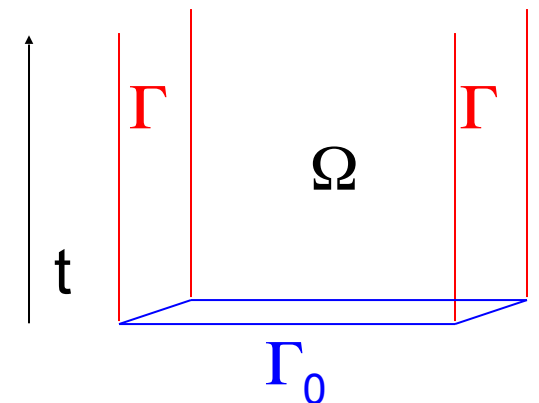
Also  $-\Delta u = f$  auf Gebiet  $\Omega$  und  $u(x)$  auf  $\Gamma$ , dem Rand von  $\Omega$



Parabolische PDE: Gegeben sind Anfangs- und Randwerte.

Also  $\Delta u = u_t$  auf Gebiet  $\Omega$  und

$u(x,0)$  auf  $\Gamma_0$  zum Zeitpunkt  $t=0$ ,  
und  $u(x,t)$  vorgegeben auf  $\Gamma$ , dem  
Rand von  $\Omega$ .



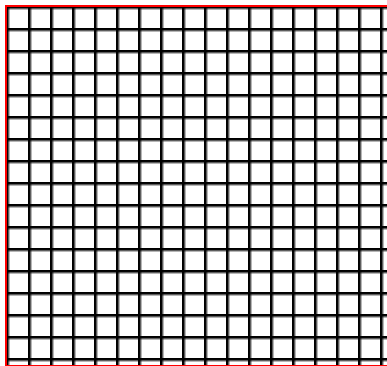


# Lösungsmethoden am Beispiel Laplacegleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{auf Gebiet } \Omega \text{ und } u(x) \text{ auf } \Gamma$$

## Differenzenverfahren:

Ersetze Differentialquotient durch Differenzenquotienten.  
 Das Gebiet  $\Omega$  wird diskretisiert, d.h. durch ein Punktegitter  $x_{jk}$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $k=1, \dots, m$ , dargestellt:

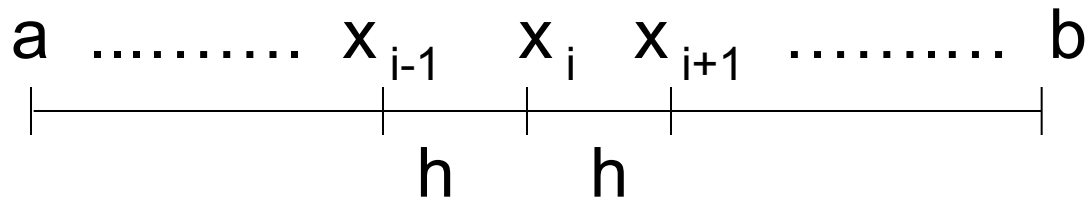


**$u(x) \rightarrow u_{jk} = u(x_{jk})$ ,  
 am einfachsten äquidistant mit  
 konstanter Schrittweite  $h$ .**

1-dimensionaler Fall:

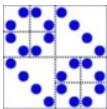
$$-u_{xx} = f \text{ für } a \leq x \leq b$$

$$u(a)=v; u(b)=w;$$



$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} = u_x(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} = u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -f_i$$



ergibt lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \boxed{\text{W}} & 0 \\ -1 & 2 & \boxed{\text{W}} & & \boxed{\text{W}} \\ 0 & \boxed{\text{W}} & \boxed{\text{W}} & \boxed{\text{W}} & 0 \\ \boxed{\text{W}} & & \boxed{\text{W}} & \boxed{\text{W}} & -1 \\ 0 & \boxed{\text{W}} & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \boxed{\text{W}} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u(a) \\ h^2 f_2 \\ \boxed{\text{W}} \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u(b) \end{pmatrix} \quad \text{Maske:} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

In 2D:  $-1$   
 Maske:  $\begin{matrix} -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix}$  entspricht Differenzfilter

Zu Lösen: Lineares Gleichungssystem

Anderer Ansatz: „Finite Elemente“, Galerkinverfahren:

Wähle Ansatzfunktionen  $u_i(x)$

(z.B. lineare B-Splines = Hut-Funktion, die genau an der Stelle  $x_i$  gleich 1 sind, und an den anderen Stützstellen gleich 0).

Setze  $u(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$  als Ansatz für die gesuchte Lösung.

Suche also Koeffizienten  $c_i$ , so dass DGL ‚möglichst gut‘ erfüllt ist.

Die Differentialgleichung selbst ist so direkt nicht erfüllbar!

# Umformulierung der DGL als Variationsproblem:

$$u_{xx} + f \equiv 0 \Leftrightarrow \int_a^b (u_{xx} + f)v(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v(x)$$

Setze in diese Gleichung für  $u(x)$  den Ansatz mit den Basisfunktionen und für  $v(x)$  ebenfalls alle Basisfunktionen.

$$\int_a^b \left( \sum_i c_i u_{i,xx}(x) + f(x) \right) u_k(x) dx = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n$$

$$\sum_{i=0}^n \left( \int_a^b u_{i,xx}(x) \cdot u_k(x) dx \right) c_i = - \int_a^b f(x) u_k(x) dx$$

für  $k = 0, \dots, n$

ergibt:  $A^*c = b$

also ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Koeffizienten  $c_i$ .

Nach Lösen des LGS liefert

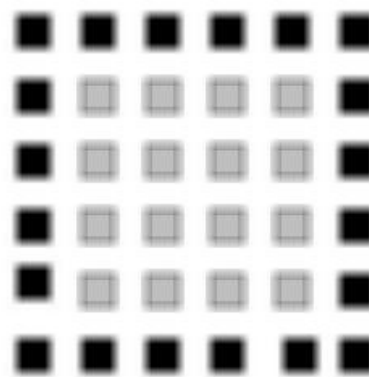
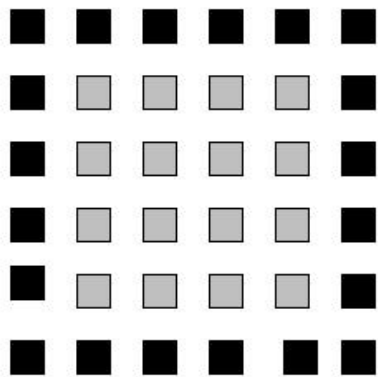
$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$$

eine Näherungslösung der gegebenen PDE.

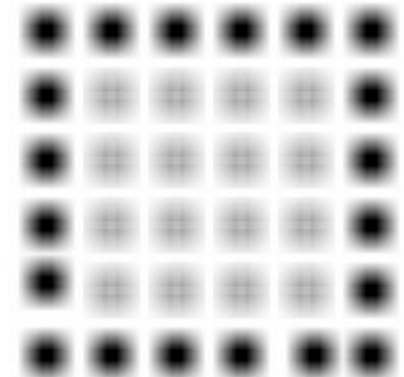
Ansatzfunktionen  $u_i(x)$  sind so zu wählen, dass sie ‚vernünftig‘ diff’bar sind und die Randbedingungen erfüllen!

# Diffusionsgleichung und Bild- verarbeitung:

Original



Aufnahme



Betrachte Bild als Momentaufnahme einer zeitabhängigen Strömung. Man kann sich vorstellen, dass die vorliegende Aufnahme durch einen Diffusionsprozess entstanden ist.

$$u_t = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u)$$

Veränderung des Bildes durch Zurückrechnen des Diffusionsprozesses.

(Lösung der Diffusionsgleichung  $\leftrightarrow$   
 Faltung mit Gauss-Funktion, Gauss-Filter, Mittelwert-  
 Filter, Weichzeichner )

Betragsmäßig großer Gradient zeigt Kanten an.  
 Außerdem ist das Bild ev. gestört durch Rauschen.  
 Ziel: Entferne Rauschen unter Beibehaltung der Kanten.

Wähle daher Diffusionskoeffizient  $D$  in Abhängigkeit vom  
 Gradienten:

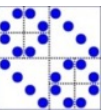
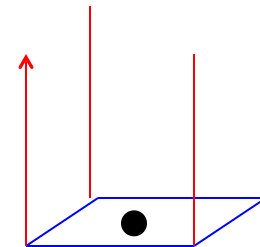


$$u_t = \operatorname{div} \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2 / \lambda^2} \cdot \nabla u \right)$$

Effekt: Gradient nahe bei Null ergibt  $D \approx 1 \rightarrow$   
 Normale Diffusion (entspricht  
 Weichzeichner zur Noise-Reduktion)

Gradient groß  $\rightarrow$  ‚Rückwärts‘-Diffusion, Bild wird  
 schärfer, Kanten bleiben erhalten.

$$u_{k+1,ij} = u_{k,ij} + \Delta t \cdot \operatorname{div}(\dots)_{ij} \quad t$$



# Zusammenfassung

- Partielle Differentialgleichungen enthalten partielle Ableitungen der gesuchten Funktion
- Sie können in drei Klassen unterteilt werden: elliptische, parabolische und hyperbolische part. DGL
- Elliptische DGL benötigen nur Randbedingungen, parabolische und hyperbolische benötigen Rand- und Anfangsbedingungen
- Es gibt (mind.) zwei Lösungsansätze: Finite Differenzen und Finite Elemente
- Ein Weichzeichner in der Bildverarbeitung kann als Diffusionsprozess modelliert werden