Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers
Dr. Frank Schmidt
Nikola Tchipev
Michael Rippl

WiSe 2016 / 2017

Numerisches Programmieren, Übungen

5. Übungsblatt: Interpolation

1) Interpolation mit unterschiedliche Basisfunktionen

Die Ausgabewerte einer unbekannten Funktion f sind an den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ gegeben: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Im folgenden untersuchen wir Schätzungen für $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Geben Sie

- das lineare Gleichungssystem für die Interpolation,
- die Interpolationsfunktion G,
- die Schätzung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)$,

für

a) die Polynom-Basisfunktionen

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = x^2,$$

(Bestimmen Sie, dass die Lösung $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}^T$ ist.)

b) die folgende "trigonometrische" Basisfunktionen

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad g_2(x) = \cos(\pi x),$$

(Bestimmen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ die Lösung ist.)

c) die Tchebycheff-Polynom-Basisfunktionen

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = 2x^2 - 1,$$

(Bestimmen Sie, dass $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T$ die Lösung ist.)

d) die Lagrange-Basispolynomen l_0, l_1, l_2 für x_0, x_1, x_2 (berechnen Sie den zuerst):

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Vergleichen Sie Ihre Antworten zu a), c) und d).

2) Stückweise Hermite-Interpolation

Ziel der Interpolation nach Hermite ist es, eine Funktion $p(x)$ zu erhalten, die überall stetig differenzierbar ist ($p \in \mathcal{C}^1$ = keine Knicke). Dazu werden zusätzlich zu Stützpunkten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ auch noch die Werte der ersten Ableitung $y'_0, \ldots, y'_n$ an den Stützstellen vorgegeben werden. Damit ist es möglich, für $p(x)$ auf jedem Teilintervall $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, ein kubisches Polynom zu erzeugen und diese Einzeldarstellungen stetig differenzierbar an den x_i zu „verkleben".

Betrachten Sie den einfachen Fall nur eines Teilintervalls mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zusätzlich zu den Funktionswerten y_0, y_1 seien auch die ersten Ableitungen y'_0, y'_1 bei x_0 und x_1 gegeben. Bestimmen Sie das kubische Polynom $p(t)$, das durch die Vorgabe dieser Werte

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \quad p(x_1) = y_1 \\ p'(x_0) &= y'_0, \quad p'(x_1) = y'_1 \end{aligned}$$

festgelegt ist! Nützen Sie hierfür den allgemeinen Ansatz für kubische Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [0; 1] = [x_0; x_1].$$

Bestimmen Sie anschließend mittels Koeffizientenvergleich die kubischen Basispolynome $H_0, \ldots, H_3$ des Hermite-Ansatzes

$$p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y'_0 \cdot H_2(t) + y'_1 \cdot H_3(t), \quad t \in [0; 1] = [x_0; x_1].$$

3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Das Aitken-Neville Verfahren gibt uns eine Möglichkeit das Interpolationspolynom zu den Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ **direkt an einer Stelle** x **auszuwerten**, ohne die tatsächliche Koeffizienten des Polynomes zu berechnen:

```
for i=0:n; p[i,0]:=f_x[i]; end
for k=1:n
    for i=0:n-k
        p[i,k] := p[i,k-1] + (x-x[i])/(x[i+k]-x[i])*(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]);
    end
end
```

Die sukzessive Berechnung der $p[i, k]$ ist hier im Vergleich zur Vorlesungsfolie äquivalent umgeformt und kann wieder mit einem Dreiecksschema veranschaulicht werden:

$$
\begin{array}{r|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & p[0,0] = y_0 & \rightarrow & p[0,1] & \rightarrow & p[0,2] & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & p[1,0] = y_1 & \rightarrow & p[1,1] & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & p[2,0] = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Der Wert des Polynoms $p(x)$ an der Stelle x steht nach Abschluss des Algorithmus' in $p[0, n]$.

Berechnen Sie den Wert des quadratischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 0.5$ für die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aus Aufgabe 2) mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

4) Fehlerabschätzung

Im Abbildung 1 links ist die tatsächliche Funktion f gezeichnet.

a) Zeichnen Sie das berechnete Interpolationspolynom von 1) dazu. Wie groß ist der Fehler an der Stelle $x = 0.5$?

b) Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_0, \ldots, x_n\}]$. Werten Sie den Fehler an der Stelle $x = 0.5$ aus! Verwenden Sie dazu

$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^3 f(\xi)| = 35.43,$$
$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^4 f(\xi)| = 107.53.$$

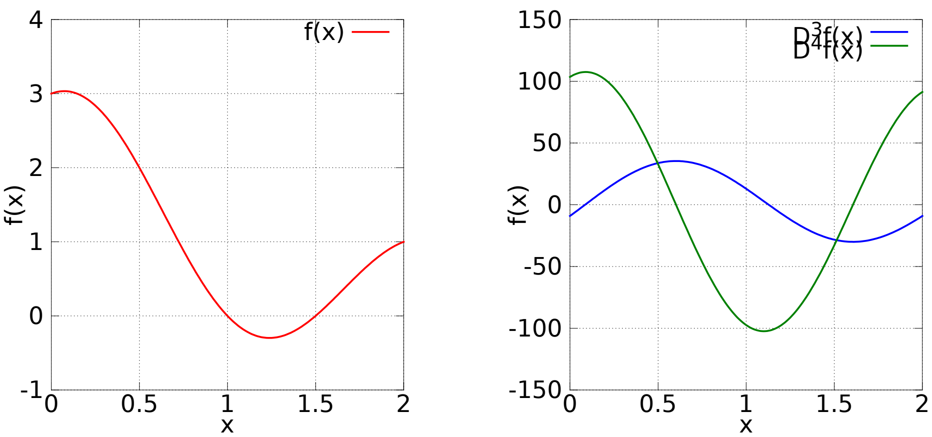

Abbildung 1: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.