Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers
Dr. Frank Schmidt
Nikola Tchipev
Michael Rippl

WiSe 2016 / 2017

Numerisches Programmieren, Übungen

9. Übungsblatt: Fixpunktiteration, Numerische Eigenwertbestimmung

1) Banach'scher Fixpunktsatz

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$\Phi(x) := x(x^2 - 1) + x.$$

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von Φ und entscheiden Sie, ob es sich um anziehende oder abstoßende Fixpunkte handelt.

b) Geben Sie ein Intervall I an, so dass alle Bedingungen des Banach'schen Fixpunktsatzes für die Funktion Φ erfüllt sind. Zeigen Sie, dass auch tatsächlich alle Bedingungen erfüllt sind. Was lässt sich daraus folgern?

2) Eigenwertbestimmung mit der Power-Iteration

Die Vektoriteration (Power-Iteration) stellt eine einfache und schnelle Methode da um Eigenvektoren iterativ zu bestimmen. Durch die Iteration mit $||x_0|| = 1$

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{||Ax_k||}$$

kann der Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert näherungsweise bestimmt werden.

Mit der inversern Iteration lassen sich beliebige Eigenwerte berechnen. Die inverse Iteration konvergiert gegen den Eigenvektor zum am nächsten an μ liegenden Eigenwert. Dazu iteriert man statt mit A mit der Matrix $B = (A - \mu I)^{-1}$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie die kleinere Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A analytisch.

b) Nun sollen die Eigenwerte von A numerisch approximiert werden. Verwenden Sie dazu die Vektoriteration für den betragsmäßig größten Eigenwert.

c) Da die Berechnung des kleinsten Eigenwerts auf dem Papier aufwendig ist wird darauf verzichtet und stattdessen soll der kleinste Eigenwert von A_1 berechnet werden. Verwenden Sie dazu die inverse Iteration und einen verkürzten Startvektor.

d) Angenommen, wir hätten in der letzten Teilaufgabe den kleinsten Eigenwert berechnet. Wie könnte nun der mittlere Eigenwert mit der inversen Iteration berechnet werden? Warum funktioniert das?

Verwenden Sie als Startvektor $x_0 = (1, 0, 0)^T$ und berechnen Sie jeweils drei Iterationen.

3) Eigenwertbestimmung mit dem QR Verfahren und Gerschgorin-Kreisen

Wir haben bereits gesehen, dass die Eigenwertberechnung mit der Vektoriteration umständlich ist wenn man alle Eigenwerte einer Matrix bestimmen will. Hierfür bietet sich das QR Verfahren an.

Dabei startet man mit einer Matrix $A_0 = A$. Man berechnet nun schrittweise

$$[Q_k, R_k] = qr(A_k)$$

$$A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$$

Gerschgorin-Kreise lassen eine schnelle Abschätzung der Lage von Eigenwerten zu. Für das Diagonalelement d_i einer Zeile der Matrix A mit zugehörigen Eigenwert λ gilt:

$$|\lambda - d_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Gegeben sei nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie eine erste Abschätzung über die Lage der Eigenwerte ab.

b) Berechnen Sie nun 3 Iterationen der QR Iteration und schätzen die Lage der Eigenwerte jeweils ab.

c) Berechnen Sie nun die tatsächliche Lage der Eigenwerte analytisch.

Zum Kapitel Fixpunktiteration gibt es nun eine Wiederholungsaufgabe. Die Aufgabe ist der Semestralklausur des SS 2008 entnommen.

Wiederholung: Fixpunktiteration

Gegeben sei eine Fixpunktiteration mit Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$, definiert durch die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift zur Berechnung der Folge x_k, $k = 1, 2, \ldots$, an!

b) Welche Fixpunkte hat die Funktion Φ? Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen anziehenden oder abstoßenden Fixpunkt handelt.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $\Phi(x)$ für $x > 0$. Bestimmen Sie dazu zunächst das Verhalten von $\Phi(x)$ für $x \to 0$ und $x \to +\infty$ sowie die Extremstellen und deren Art.

d) Im Folgenden sollen weitere Eigenschaften der Iterationsfunktion Φ bzw. der zugehörigen Iterationswerte x_k, $k = 1, 2, \ldots$, gezeigt werden:

   i) Man begründe: $\Phi(x) \geq 1 \quad \forall\, x > 0$

   ii) Man zeige: $x_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_k \geq 1 \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots$

   iii) Man zeige: $x_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_k \geq x_{k+1} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots$

   Was folgt daraus für die Konvergenz von x_k, falls $x_0 > 0$?

e) Nun betrachten wir die Funktion

$$f(x) = x - \frac{1}{x}. \tag{2}$$

   Zeigen Sie die Äquivalenz

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) = x.$$

   Welche Nullstellen hat f?

f) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f aus Teilaufgabe e)!