

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 2. Übungsblatt: Kondition und Stabilität

1) Kondition

$$\text{a) } \text{cond}(f_1, x) = \left| \frac{x \cdot a}{a \cdot x} \right| = 1$$

⇒ keine Zunahme des relativen Fehlers durch Multiplikation ⇒ gut konditioniert

$$\text{b) } \text{cond}(f_2, x) = \left| \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a-x}{b}} \right| = \left| \frac{x}{a-x} \right|$$

⇒ $\text{cond}(f_2, x) \gg 1$ für $x \approx a$ und $a \neq 0$ ⇒ schlecht konditioniert für $x \approx a$

$$\text{c) } \text{cond}(f_3, x) = \left| \frac{x}{3e^x - 3} \cdot 3e^x \right| = \left| \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} \right|$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \text{cond}(f_3, x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} \right| \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x \cdot e^x}{e^x} \right| \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) \right| = 1 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für die interessanten Fälle:

$$\text{cond}(f_3, x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{für } x \rightarrow \infty \\ 1 & \text{für } x \rightarrow 0 \\ 0 & \text{für } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{d) } \text{cond}(f_4, x) = \left| \frac{x \cdot px^{p-1}}{x^p} \right| = p$$

⇒ schlecht konditioniert für große p

2) Beispiel für schlechte Kondition: Schnittpunkt zweier Geraden

a) Durch gleichsetzen der beiden Geraden

$$\begin{aligned}g_1 = g_2 &\Leftrightarrow x = mx + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{1-m} =: f(m)\end{aligned}$$

erhalten wir den x-Wert des Schnittpunktes. Die Funktion f beschreibt nun den Zusammenhang zwischen der Eingabe m und der Ausgabe x .

b) Mit der Ableitung

$$f'(m) = (-1) \cdot (1-m)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-m)^2}$$

gilt für die Konditionszahl

$$\text{cond}(f, m) = \left| \frac{m(1-m)^{-2}}{(1-m)^{-1}} \right| = \left| \frac{m}{1-m} \right|.$$

Für $m \approx 1$ ($\hat{=}$ Geraden fast parallel) folgt somit $\text{cond} \rightarrow \infty$, d.h. es liegt ein schlecht konditioniertes Problem vor. Das wollen wir uns jetzt an einem genauen Zahlenbeispiel verdeutlichen. Für die gegebene Stelle $m = 1.005$ haben wir die Kondition

$$\text{cond}(f, 1.005) = \left| \frac{1 + \frac{1}{200}}{\frac{1}{200}} \right| = \underline{201}.$$

Damit erwarten wir, dass mit $m = 1.005$ ein relativer Eingabefehler um ungefähr das 200-fache verstärkt wird.

c) Um wieviel wird der Eingabefehler nun wirklich verstärkt? Dazu berechnen wir den tatsächlichen Schnittpunkt, den fehlerhaften Schnittpunkt, und die relativen Fehler in Ein- und Ausgabe.

$$\begin{aligned}x = f(m) &= \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-1.005} = -200 \\ \tilde{x} = f(\tilde{m}) &= \frac{1}{1-\tilde{m}} = \frac{1}{1-1.01} = -100 \\ \text{relativer Eingabefehler} &: \left| \frac{m - \tilde{m}}{m} \right| = \left| \frac{\frac{1}{200}}{\frac{201}{200}} \right| = \frac{1}{201} \\ \text{relativer Ausgabefehler} &: \left| \frac{f(m) - f(\tilde{m})}{f(m)} \right| = \left| \frac{-200 + 100}{-200} \right| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Somit ist der verstärkende Faktor

$$\frac{\text{relativer Ausgabefehler}}{\text{relativer Eingabefehler}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{201}} = \underline{100.5}$$

3) Stabilität

Mit der Epsilontik lässt sich die Fehlerverstärkung innerhalb eines Berechnungsverfahrens analysieren. Bei der Betrachtung des relativen Ausgabefehlers $\left| \frac{\text{rd}(f)(x) - f(x)}{f(x)} \right|$ gelten dabei folgende Regeln:

- Jede Operation erzeugt einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_M$, d.h.

$$(a \text{ op}_M b) = (a \text{ op } b) \cdot (1 + \varepsilon_i) \text{ mit } |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_M$$

- $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \doteq 0$

Mit Rundungsfehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ stellen sich die gerundeten f -Auswertungen wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \text{rd}(f_1)(x) &= a \cdot x \cdot (1 + \varepsilon_1) \\ &= \boxed{f_1(x) + f_1(x) \cdot \varepsilon_1} \\ \text{rd}(f_2)(x) &= \frac{(a - x) \cdot (1 + \varepsilon_1)}{b} \cdot (1 + \varepsilon_2) \doteq \frac{(a - x)}{b} \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &= \boxed{f_2(x) + f_2(x) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ \text{rd}(f_3)(x) &= (3e^x(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) - 3)(1 + \varepsilon_3) \\ &\doteq (3e^x(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 3)(1 + \varepsilon_3) \\ &= (3e^x - 3)(1 + \varepsilon_3) + 3e^x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \\ &\doteq \boxed{f_3(x)(1 + \varepsilon_3) + 3e^x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den die Stabilität beschreibenden relativen Fehler:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{rd}(f_1)(x) - f_1(x)}{f_1(x)} \right| &= \left| \frac{f_1(x) + f_1(x) \cdot \varepsilon_1 - f_1(x)}{f_1(x)} \right| = |\varepsilon_1| \\ \left| \frac{\text{rd}(f_2)(x) - f_2(x)}{f_2(x)} \right| &= \left| \frac{f_2(x) + f_2(x) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - f_2(x)}{f_2(x)} \right| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \\ \left| \frac{\text{rd}(f_3)(x) - f_3(x)}{f_3(x)} \right| &= \left| \frac{f_3(x) \cdot \varepsilon_3 + 3e^x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{f_3(x)} \right| = \left| \varepsilon_3 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{3e^x}{3e^x - 3} \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} |\varepsilon_3| + \left| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^x}{e^x - 1} \right| \leq \varepsilon_M + 2\varepsilon_M \left| \frac{e^x}{e^x - 1} \right| \\ &= \varepsilon_M \left(1 + 2 \cdot \left| \frac{e^x}{e^x - 1} \right| \right) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Auswertungen der Funktionen f_1 und f_2 sind somit offensichtlich stabil. Der Algorithmus zur Auswertung von $f_3(x)$ ist instabil für alle Werte $x \approx 0$, ansonsten stabil. **Achtung:** Für zunehmendes x haben wir bereits in Teilaufgabe 1 a) festgestellt, dass auch die Konditionszahl von $f_3(x)$ steigt. Also ist zwar die Auswertung von $f_3(x)$ für große x per Definition stabil, diese Aussage ist jedoch in Anbetracht der schlechten Kondition wertlos!

Für $x \approx 0$ haben wir den Fall eines instabilen Algorithmus trotz guter Kondition!

4) Ermittlung von π nach Archimedes

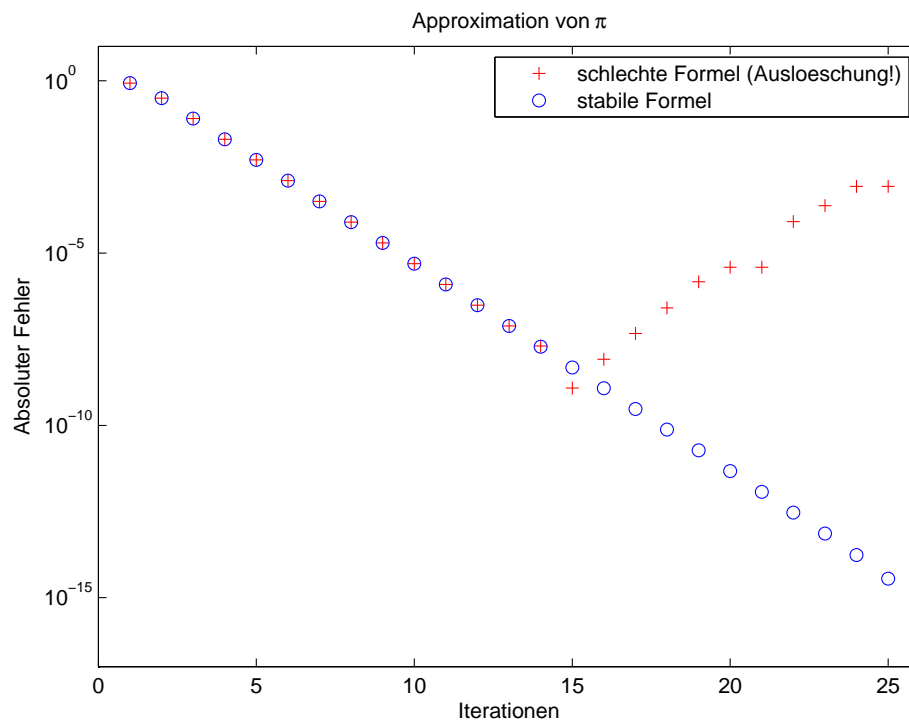
Vermeintlich höhere Genauigkeit durch mehr Rekursionen verbessert das Ergebnis nicht sondern zerstört den gesamten Wert!

Problem: Auslöschung!

Algebraische Umformung zur Vermeidung der Auslöschung:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} \\ &= \frac{|s_n|}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} \end{aligned}$$

Vergleich der absoluten Fehler der beiden Formeln in Bezug auf echte Lösung π in semilogarithmischer Skala (erstellt mit matlab-Programm archimedes.m aus www):



Falls Sie in **float**-Genauigkeit, statt **double**-Genauigkeit rechnen, tritt das Problem früher auf!

Zusatzaufgabe) Klausuraufgabe SoSe 2014

a) Kondition

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \text{cond}_f(x) = \left| \frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)} \right|$$

i)

$$\begin{aligned} \text{cond}_f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)} \right| = \frac{-\infty}{-\infty} (\text{l'Hospital}) = \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{1}{x+1} \right| = \infty \end{aligned}$$

schlecht konditioniert.

ii)

$$\begin{aligned} \text{cond}_f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)} \right| = \frac{0}{0} (\text{l'Hospital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x+1} \right| = 1 \end{aligned}$$

gut konditioniert.

b) Stabilität

$$\begin{aligned} \text{rd}(f)(x) &= (1 + \varepsilon_2) \ln((1 + \varepsilon_1)(x + 1)) \\ &= (1 + \varepsilon_2) \ln(1 + \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_2) \ln(x + 1) \\ \left| \frac{\text{rd}(f)(x) - f(x)}{f(x)} \right| &= \left| \frac{(1 + \varepsilon_2) \ln(1 + \varepsilon_1)}{\ln(x + 1)} + \varepsilon_2 \right| \end{aligned}$$

i) $x \rightarrow -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{(1 + \varepsilon_2) \ln(1 + \varepsilon_1)}{\ln(x + 1)} + \varepsilon_2 \right| = |\varepsilon_2| \leq \varepsilon_{Ma}$$

stabil, aber laut a) schlecht konditioniert.

ii) $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{(1 + \varepsilon_2) \ln(1 + \varepsilon_1)}{\ln(x + 1)} + \varepsilon_2 \right| = \infty$$

instabil.