Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers
Dr. Frank Schmidt
Nikola Tchipev
Michael Rippl

WiSe 2016 / 2017

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 3. Übungsblatt: Gaußelimination mit Pivotsuche, LR-Zerlegung, Matrixnorm

1) Gauß-Elimination und Pivotsuche

a) Gauß-Elimination ohne Pivotsuche und mit exakter Arithmetik:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 0 & 2001 & 2000 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{2000}{2001} = 0.9995\ldots, \qquad x_1 = (x_2 - 1) \cdot 1000 = -0.4997\ldots$$

$$\Rightarrow \quad x = \boxed{\begin{pmatrix} -0.4997\ldots \\ 0.9995\ldots \end{pmatrix}}.$$

b) Gauß-Elimination ohne Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (3 Stellen):

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.000 \cdot 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2.001 \cdot 10^{3} & 2.000 \cdot 10^{3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Runden}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1.00 \cdot 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2.00 \cdot 10^{3} & 2.00 \cdot 10^{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Der zweite Eintrag x_2 ist in Ordnung, aber x_1 ist komplett falsch!

c) Gauß-Elimination mit Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (3 Stellen):

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2001}{2000} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Runden}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \qquad x_1 = -x_2/2 = -0.5$$

$$\Rightarrow \quad x = \boxed{\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Diesmal ist x für beide Einträge in der passenden Größenordnung (vgl. i)).

2) LR-Zerlegung

Zunächst folgt eine kleine Einführung zur LR-Zerlegung. Zuerst wird die Matrix A in ein Produkt zweier Matrizen zerlegt, einmal in die linke untere Dreiecksmatrix L mit 1-ern auf der Diagonalen, und die rechte obere Dreiecksmatrix R. Daraufhin wird mit der Vorwärts- und der Rückwärtssubstitution das lineare Gleichungssystem gelöst. Eine mögliche Umsetzung der drei Abschnitte in Pseudocode sieht folgendermaßen aus:

1. LR-Zerlegung: $A = LR$

```
for i=1:n % Fuer jede Zeile i
    for k=1:i-1 % Berechne Elemente L[i,k]
        L[i,k] := A[i,k];
        for j=1:k-1
            L[i,k] := L[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
        end
        L[i,k] := L[i,k]/R[k,k];
    end

    for k=i:n % Berechne Elemente R[i,k]
        R[i,k] := A[i,k];
        for j=1:i-1
            R[i,k] := R[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
        end
    end
end
```

2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$

```
for i=1:n
    y[i] := b[i];
    for j=1:i-1
        y[i] := y[i]-L[i,j]*y[j];
    end
end
```

3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

```
for i=n:-1:1
    x[i] := y[i];
    for j=i+1:n
        x[i] := x[i]-R[i,j]*x[j];
    end
    x[i] := x[i]/R[i,i];
end
```

Die Grundidee ist für die Algorithmen Gaußelimination und LR-Zerlegung natürlich die gleiche: Bringe A durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Der Gauß-Algorithmus eliminiert sukzessive Einträge in einer Spalte i (äußere Schleife), geht also spaltenweise vor. Dagegen berechnet unser LR-Algorithmus für jedes i der äußeren Schleife die Einträge von L und R in der Zeile i; er arbeitet also zeilenweise. Die zweite Schleife über k läuft dementsprechend über die nötigen Spaltenindizes von L und R.

Um zu verstehen, warum der LR-Algorithmus die angegebene Form hat, betrachten wir die Zerlegung genauer. $A = L \cdot R$ bedeutet in Indexnotation

$$A_{ik} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \cdot R_{jk}, \qquad i, k = 1, \ldots, n$$

wobei n die Dimension der Matrix A ist. Die Einträge A_{ik} können in solche unterhalb bzw. oberhalb der Diagonalen aufgesplittet und getrennt betrachtet werden.

- $i > k$: Einträge unterhalb der Diagonalen: "Zeile mal Spalte" im Produkt $L \cdot R$ ergibt aufgrund der Nullen eine Summe, die nur bis k läuft (kleinerer der beiden Indizes):

$$\begin{aligned} A_{ik} \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \cdot R_{jk} \;=\; \sum_{j=1}^{k} L_{ij} \cdot R_{jk} \;=\; \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot R_{jk} + L_{ik} \cdot R_{kk} \\ \Rightarrow \quad L_{ik} \quad &= \quad \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot R_{jk} \right) / R_{kk}. \end{aligned}$$

- $i \leq k$: Einträge oberhalb der Diagonalen: Die Summe läuft nur bis i (kleinerer der beiden Indizes):

$$\begin{aligned} A_{ik} \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \cdot R_{jk} \;=\; \sum_{j=1}^{i} L_{ij} \cdot R_{jk} \;=\; \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot R_{jk} + L_{ii} \cdot R_{ik} \\ \Rightarrow \quad R_{ik} \quad &= \quad \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot R_{jk} \right) / \underbrace{L_{ii}}_{=1}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir exakt die Formeln der LR-Zerlegung aus dem angegebenen Algorithmus. Man macht sich leicht klar, dass aufgrund des zeilenweisen Durchlaufs der äußeren Schleife (über i) stets alle nötigen Werte schon vorhanden sind, um die neuen Einträge L_{ik} und R_{ik} zu berechnen.

a) Lösungsschritte bei Anwendung von Gauß-Elimination auf das Problem $Ax = b$

1. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & -11/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \end{array} \right)$$

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

4. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Für die Berechnung der Zerlegung (1.) von $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ stellen wir zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Die erste basiert auf den Algorithmen wie oben beschrieben und damit der Gaußelimination, die zweite auf dem Lösen von Gleichungen aus der Gleichung $A = LR$.

LR-Zerlegung basierend auf Gaußelimination Die Matrizen L und R denken wir uns mit lauter Nulleinträgen vorbelegt. Neu hinzukommende Einträge werden mit einer Box gekennzeichnet.

- i=1:

$$
\begin{aligned}
L: \quad & for\ k = 1:0 \ \Rightarrow \text{nichts zu tun (empty)} \\
R: \quad & for\ k = 1:3 \\
& \quad R[1,k] = A[1,k]; \\
& for\ j = 1:0 \ \Rightarrow \text{empty} \quad \Rightarrow \ R = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- i=2:

$$
\begin{aligned}
L: \quad & for\ k = 1:1 \\
& \quad L[2,1] = A[2,1] = 2; \\
& \quad for\ j = 1:0 \ \Rightarrow \text{empty} \\
& \quad L[2,1] = L[2,1]/R[1,1] = 2/4; \quad \Rightarrow \ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
R: \quad & for\ k = 2:3 \\
& \quad R[2,k] = A[2,k]; \\
& \quad for\ j = 1:1 \\
& \qquad R[2,k] = R[2,k] - L[2,1] \cdot R[1,k]; \\
& \qquad \to k = 2: \ R[2,2] = R[2,2] - L[2,1] \cdot R[1,2] = 2 - 1/2 \cdot 2 = 1; \\
& \qquad \to k = 3: \ R[2,3] = R[2,3] - L[2,1] \cdot R[1,3] = 1 - 1/2 \cdot 3 = -1/2; \\
& \Rightarrow \ R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{\text{-1/2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- i=3:

$$
\begin{array}{lll}
L: & for\ k=1:2 & \\
& \quad L[3,k]=A[3,k]; & \\
& \quad for\ j=1:k-1 & \\
& \qquad \to k=1: \text{empty} & \\
& \qquad \to k=2: L[3,2]=L[3,2]-L[3,1]*R[1,2]=1; & \\
& \quad L[3,k]=L[3,k]/R[k,k]; \quad \Rightarrow\ L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} & \\
R: & for\ k=3:3 & \\
& \quad R[3,3]=A[3,3]; & \\
& \quad for\ j=1:2 & \\
& \qquad R[3,3]=R[3,3]-L[3,j]\cdot R[j,3]; & \\
& \qquad \to j=1: R[3,3]=2-1/2\cdot 3=1/2; & \\
& \qquad \to j=2: R[3,3]=1/2-1\cdot(-1/2); & \\
& \Rightarrow\ R=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

Damit haben wir unsere gesuchte Zerlegung:

$$
A \;=\; L\cdot R \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

LR-Zerlegung basierend auf Matrixmultiplikation Wir beginnen mit allen uns bekannten Informationen über die LR-Zerlegung von A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Wir sehen 9 Unbekannte auf der rechten Seite, und für jeden der 9 Einträge in A entsteht eine Gleichung. Diese Gleichungen werden wir nun nacheinander (von oben nach unten oder von links nach rechts) durchgehen, und jedes Mal nach der fehlenden Unbekannten auflösen. Beginnen wir mit dem Feld $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$A_{11} = 4 \stackrel{!}{=} 1 \cdot R_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \Rightarrow R_{11} = 4.$$

Das Gleiche machen wir mit Feld (2,1):

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

und damit

$$A_{21} = 2 \stackrel{!}{=} L_{21} \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{2}.$$

Verfolgen wir dieses Vorgehen weiter, erhalten und lösen wir nacheinander folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{c|ll}
(1,1) & 4 = 1 \cdot R_{11} & \Rightarrow R_{11} = 4 \\
(2,1) & 2 = L_{21} \cdot 4 & \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{2} \\
(3,1) & 2 = L_{31} \cdot 4 & \Rightarrow L_{31} = \frac{1}{2} \\
(1,2) & 2 = 1 \cdot R_{21} & \Rightarrow R_{21} = 2 \\
(2,2) & 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot R_{22} & \Rightarrow R_{22} = 1 \\
(3,2) & 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + L_{32} \cdot 1 & \Rightarrow L_{32} = 1 \\
(1,3) & 3 = 1 \cdot R_{13} & \Rightarrow R_{13} = 3 \\
(2,3) & 1 = \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot R_{23} & \Rightarrow R_{23} = -\frac{1}{2} \\
(3,3) & 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot -\frac{1}{2} + 1 \cdot R_{33} & \Rightarrow R_{33} = 1
\end{array}$$

Damit ergibt sich dann die selbe Lösung wie oben.

c) Substitution:

- Vorwärtssubstitution $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad y = (5,\ -11/2,\ 3)^T.$$

- Rückwärtssubstitution $Rx = y$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad x = (1,\ -4,\ 3)^T.$$

d) Die Zerlegung ist bereits bekannt, daher müssen zur Lösung von $Ax = c$ lediglich Vorwärts- und Rückwärtssubstitution durchgeführt werden. Der Aufwand hierfür ist $O(n^2)$ Operationen (vergleiche $O(n^3)$ Operationen für die Berechnung der Zerlegung bei der Lösung von $Ax = b$).

Substitution:

- Vorwärtssubstitution $L\tilde{y} = c$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{y} = (2,\ 0,\ 1)^T.$$

- Rückwärtssubstitution $Rx = \tilde{y}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad x = (-1/2,\ 1/2,\ 1)^T.$$

3) Matrixnorm

a) $\|D\|_2 \geq |d_{jj}|$.

Sei e_j der Vektor mit 1 an der Stelle j und 0 an alle andere Stellen:

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j.$$

e_j ist ein Eigenvektor zu Eigenwert d_{jj}: $De_j = d_{jj}e_j$. Dann:

$$\|D\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|De_j\|_2}{\|e_j\|_2} = \frac{\|d_{jj}e_j\|}{1} = |d_{jj}|\|e_j\| = |d_{jj}|$$

b) $\|D\|_2 \leq |d_{jj}|$:

$$\begin{aligned}
\|D\|_2 &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x_1^2 d_{11}^2 + x_2^2 d_{22}^2 + \ldots + x_n^2 d_{nn}^2}}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \\
&\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x_1^2 d_{jj}^2 + x_2^2 d_{jj}^2 + \ldots + x_n^2 d_{jj}^2}}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \\
&= \sup_{x \neq 0} |d_{jj}| \frac{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \\
&= \sup_{x \neq 0} |d_{jj}| \\
&= |d_{jj}|.
\end{aligned}$$

Zum Schluss:

- $\|D\|_2 \leq |d_{jj}|$,
- $\|D\|_2 \geq |d_{jj}|$,

dann muss $\|D\|_2 = |d_{jj}|$ gelten.

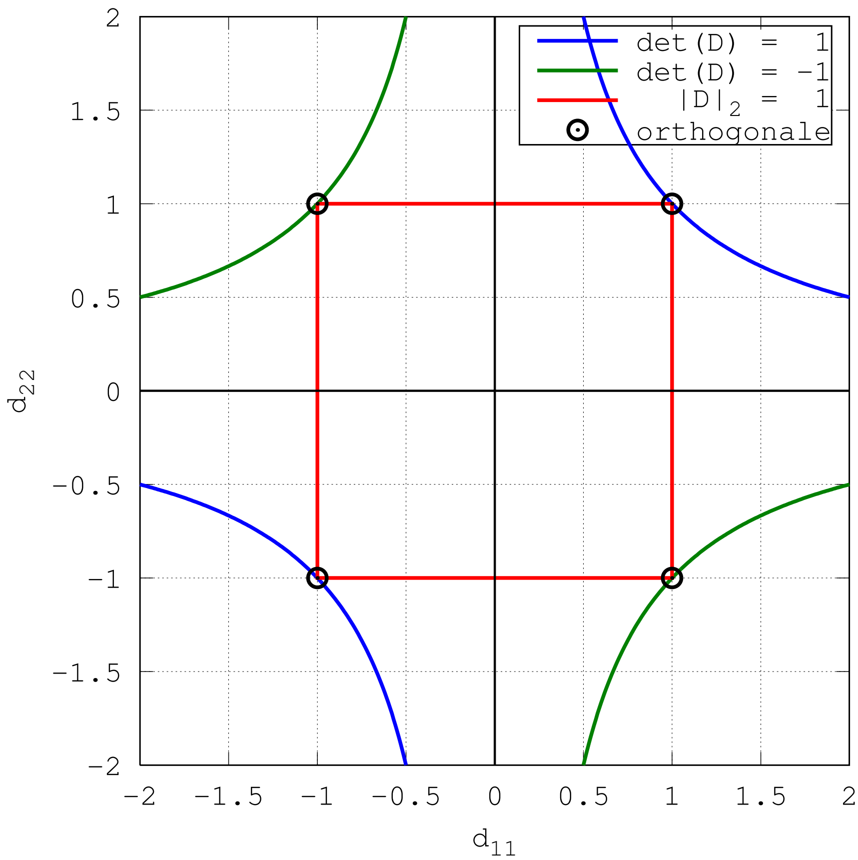
4) Orthogonale Matrizen

a) $\det Q = \pm 1$:
$1 = \det I = \det(QQ^T) = \det Q \det Q^T = (\det Q)^2$.
Die Gleichung $x^2 = 1$ hat nur ± 1 als Lösungen.

b) $\|Q\|_2 = 1$:

$$\|Q\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T Q^T Q x}}{\sqrt{x^T x}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T I x}}{\sqrt{x^T x}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T x}}{\sqrt{x^T x}} = \sup_{x \neq 0} 1 = 1$$

Zusatz:



Unter 2×2 diagonale Matrizen gibt es 4 orthogonale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe: Image Stitching mit Gauß-Elimination

Gegeben seien zwei Merkmalpunkte $\mathbf{x}_1 = [3\ 2]^T$ und $\mathbf{x}_2 = [4\ 3]^T$ im Bild I_1 und deren korrespondierende Punkte $\mathbf{x}_1' = [1\ 2]^T$ und $\mathbf{x}_2' = [2\ 4]^T$ im anderen Bild I_2. Wie bereits erwähnt, lässt sich der Zusammenhang zwischen korrespondierenden Punkten über die Transformation $\mathbf{x}' = H \cdot \mathbf{x}$ ausdrücken. Nun gilt es die Einträge der "Homography-Matrix" zu finden.

Notieren wir zunächst den bekannten Zusammenhang für das erste Paar korrespondierender Punkte:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_1}' &= H \cdot \mathbf{x_1} \\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x_2}' &= H \cdot \mathbf{x_2} \\ \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nach der Matrix-Vektor-Multiplikation erhalten wir ein System mit vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$.

$$\begin{aligned}3h_{11} &+ 2h_{12} &= 1\\ 3h_{21} &+ 2h_{22} &= 2\\ 4h_{11} &+ 3h_{12} &= 2\\ 4h_{21} &+ 3h_{22} &= 4\end{aligned}$$

Durch Tauschen der zweiten und dritten Gleichung erhalten wir das folgende (lineare) Gleichungssystem, das wir mittels Gauß-Elimination lösen:

$$A \cdot \mathbf{h} = b \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\\ h_{21}\\ h_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4\end{array}\right)$$

Die Gauß-Elimination erfolgt wie folgt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4\end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot\frac{4}{3} \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4\end{array}\right) /\cdot\frac{4}{3} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{array}\right)$$

Damit lässt sich leicht $\boxed{h_{22} = 4,\ h_{21} = -2,\ h_{12} = 2,\ h_{11} = -1}$ berechnen.

Weiterer Lösungsweg: $Hx_1 = {x_1}'$ und $Hx_2 = {x_2}'$ lässt sich schreiben als

$$
\begin{aligned}
H \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {x_1}' & {x_2}' \end{bmatrix} \quad |^T \\
\begin{bmatrix} {x_1}^T \\ {x_2}^T \end{bmatrix} H^T &= \begin{bmatrix} {x_1}'^T \\ {x_2}'^T \end{bmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} H^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\text{Gauß}: \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \\
\Rightarrow H^T &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

und damit folgt die Lösung $H = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.