Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers
Dr. Frank Schmidt
Nikola Tchipev
Michael Rippl

WiSe 2016 / 2017

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 5. Übungsblatt: Interpolation

1) Interpolation mit Unterschiedliche Basis Funktionen

Für Stützpunkte $x_0, \ldots, x_n$ und Basisfunktionen $g_0, \ldots, g_n$, sieht das lineare Gleichungssystem für die Interpolation so aus:

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$G(x) = 2x^2 - 5x + 3$
$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

b) "trigonometrische" Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$G(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x)$,
$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Tchebycheff-Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$G(x) = (2x^2 - 1) - 5x + 4 = 2x^2 - 5x + 3$
$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

d) Lagrange-Basispolynome

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-2)(0-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \\ l_1 &= \frac{(x-0)(x-2)}{(1-2)(1-0)} = \frac{x(x-2)}{-1} \\ l_2 &= \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$G(x) = 3\frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 2x^2 - 5x + 3$
$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Vergleich von a), c) und d): **Interpolationspolynom** ist eindeutig!

2) Hermite-Interpolation

Mit den Interpolationsbedingungen (1)

$$p(x_0) \;=\; y_0, \quad p(x_1) \;=\; y_1, \quad p'(x_0) = y_0', \quad p'(x_1) \;=\; y_1'$$

sowie dem allgemeinen Ansatz für kubische Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [0;1] = [x_0;x_1]$$

bzw. dessen Ableitung

$$p'(t) = a_1 t + 2a_2 t + 3a_3 t^2, \quad t \in [0;1] = [x_0;x_1]$$

ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lclclclcl}
p(t=0) & = & a_0 & & & & & & \stackrel{!}{=} \; y_0 \\
p(t=1) & = & a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 \stackrel{!}{=} \; y_1 \\
p'(t=0) & = & & & a_1 & & & & \stackrel{!}{=} \; y_0' \\
p'(t=1) & = & & & a_1 & + & 2a_2 & + & 3a_3 \stackrel{!}{=} \; y_1'
\end{array}$$

Nach etwas Umsortieren erhalten wir in Matrix-Vektor-Notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_0' \\ y_0 \end{pmatrix}$$

und Umformen auf Zeilenstufenform liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -y_1' + 3y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \end{array}\right).$$

Mit Rückwärtssubstitution ergibt sich somit als Lösung

$$\begin{array}{rcl}
a_0 & = & y_0 \\
a_1 & = & y_0' \\
a_2 & = & -y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0 \\
a_3 & = & y_1 - (-y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0) - y_0' - y_0 \\
 & = & 2y_0 + y_0' - 2y_1 + y_1'
\end{array}$$

Damit erhalten wir das kubische Polynom

$$p(t) = y_0 + y_0' t + (-y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0)t^2 + (2y_0 + y_0' - 2y_1 + y_1')t^3$$

bzw. sortiert nach y_0, y_1, y_0' und y_1':

$$p(t) = y_0 \cdot (1 - 3t^2 + 2t^3) + y_1 \cdot (3t^2 - 2t^3) + y_0' \cdot (t - 2t^2 + t^3) + y_1' \cdot (-t^2 + t^3).$$

Mittels Koeffizientenvergleich bzgl. den Variablen y_0, y_1, y_0' und y_1' erhalten wir schließlich die kubischen Basispolynome H_i, $i = 0, 1, 2, 3$, des Hermite-Ansatzes

$$p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) + y_1' \cdot H_3(t).$$

Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ H_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ H_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ H_3(t) &= -t^2 + t^3. \end{aligned}$$

3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Die zu interpolierenden Punkte (*hier für alle vier Punkte*) sind:

$$\begin{array}{rrlrr} x_0 = & 0\ , & & f(x_0) = & 3 \\ x_1 = & 1\ , & & f(x_1) = & 0 \\ x_2 = & 2\ , & & f(x_2) = & 1 \\ x_3 = & 1.5\ , & & f(x_3) = & 0. \end{array}$$

Damit ergibt sich für die Auswertung des Algorithmus ($p[i,0] = f(x_i)$ ist ja klar):

$\underline{k = 1}$:

$$\begin{aligned} p[0,1] &= p[0,0] + \frac{x - x[0]}{x[1] - x[0]} (p[1,0] - p[0,0]) &&= 3 + \frac{0.5 - 0}{1 - 0}(0 - 3) &&= 1.5 \\ p[1,1] &= p[1,0] + \frac{x - x[1]}{x[2] - x[1]} (p[2,0] - p[1,0]) &&= 0 + \frac{0.5 - 1}{2 - 1}(1 - 0) &&= -0.5 \\ p[2,1] &= p[2,0] + \frac{x - x[2]}{x[3] - x[2]} (p[3,0] - p[2,0]) &&= 1 + \frac{0.5 - 2}{1.5 - 2}(0 - 1) &&= -2 \end{aligned}$$

$\underline{k = 2}$:

$$\begin{aligned} p[0,2] &= p[0,1] + \frac{x - x[0]}{x[2] - x[0]} (p[1,1] - p[0,1]) &&= 1.5 + \frac{0.5 - 0}{2 - 0}(-0.5 - 1.5) &&= 1 \\ p[1,2] &= p[1,1] + \frac{x - x[1]}{x[3] - x[1]} (p[2,1] - p[1,1]) &&= -0.5 + \frac{0.5 - 1}{1.5 - 1}(-2 - (-0.5)) &&= 1 \end{aligned}$$

$\underline{k = 3}$:

$$p[0,3] = p[0,2] + \frac{x - x[0]}{x[3] - x[0]} (p[1,2] - p[0,2]) = 1 + \frac{0.5 - 0}{2 - 0}(1 - 1) = \boxed{1}$$

Für das Dreicksschema erhält man somit:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \backslash k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\
\hline
0 & 0 & f(x_0) = 3 & \rightarrow & 1.5 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \boxed{1} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & f(x_1) = 0 & \rightarrow & -0.5 & \rightarrow & 1 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
2 & 2 & f(x_2) = 1 & \rightarrow & -2 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
1.5 & 3 & f(x_3) = 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Der Wert von $p(x = 0.5)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = 2x^3 - 5x + 3$ an der Stelle $x = 0.5$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

4) Fehlerabschätzung

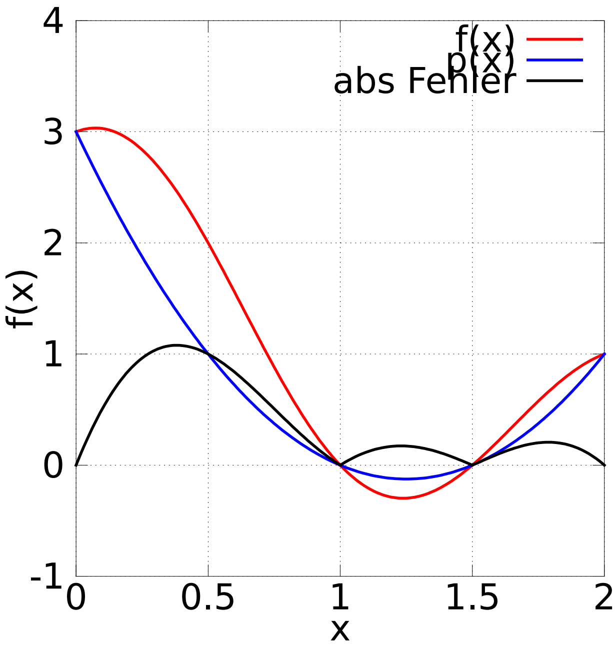

Abbildung 1: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.

a) $|f(0.5) - p(0.5)| = |2 - 1| = 1$

b) Mit den drei Punkten:

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^3 f(\xi)}{3!} \cdot (0.5-0)(0.5-1)(0.5-2) \right| \\ &= \frac{1}{16} \cdot |D^3 f(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{16} \cdot \max_{x \in [0,2]} |D^3 f(x)| = \frac{1}{16} 35.43 \approx 2.21 \end{aligned}$$

oder mit den vier Punkten:

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^4 f(\xi)}{4!} \cdot (0.5-0)(0.5-1)(0.5-1.5)(0.5-2) \right| \\ &= \frac{1}{64} \cdot |D^4 f(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{64} \cdot \max_{x \in [0,2]} |D^4 f(x)| = \frac{1}{64} 107.53 \approx 1.68 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Funktion war

$$f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin(\pi x).$$