Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers
Dr. Frank Schmidt
Nikola Tchipev
Michael Rippl

WiSe 2016 / 2017

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

a)

$$\begin{aligned}
Q_1(f) &= \int_0^1 f(0)\cdot L_0(x) + f(1)\cdot L_1(x)\,dx \\
&= \int_0^1 f(0)\cdot \frac{x-1}{0-1} + f(1)\cdot \frac{x-0}{1-0}\,dx \\
&= \int_0^1 f(0)\cdot(-x+1) + f(1)\cdot x\,dx \\
&= \left[f(0)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right) + f(1)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= f(0)\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right) + f(1)\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = (2x^2-3x+1) \\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = (-4x^2+4x) \\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = (2x^2-x) \\
Q_2(f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\cdot L_k(x)\,dx \\
&= f(0)\cdot\int_0^1 L_0(x)dx + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^1 L_1(x)dx + f(1)\cdot\int_0^1 L_2(x)dx \\
&= \frac{1}{6}\left(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)\right)
\end{aligned}$$

c) Allgemeines Polynom 3. Grades aufstellen, an den Stützstellen auswerten, einsetzen, ausrechnen und mit analytischem Integral vergleichen!

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\
p(0) &= c_0 \\
p(\frac{1}{2}) &= c_3/8 + c_2/4 + c_1/2 + c_0 \\
p(1) &= c_3 + c_2 + c_1 + c_0 \\
Q_2(p) &= \frac{3c_3 + 4c_2 + 6c_1 + 12c_0}{12} \\
&= \left[\frac{c_3x^4}{4} + \frac{c_2x^3}{3} + \frac{c_1x^2}{2} + c_0x\right]_0^1 = \int_0^1 p(x)\,dx
\end{aligned}$$

Hinweis: Bemerkenswert ist hier, dass mit einem Verfahren, welches auf einem Polynom vom Grad 2 basiert, ein Polynom vom Grad 3 exakt integriert werden kann.

d) Hinweis: in Teilaufgaben i) und ii) handelt es sich um Werte, die nicht auf analytischem Weg bestimmt werden können.

	$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$I_1(f)$
i)	$\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)$	0	0	0
ii)	$\frac{\sin(\pi x)}{x}$	π	0	$\frac{\pi}{2}$
iii)	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	1	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{e}}$

Bei Aufgabe ii) muss die Regel von l'Hospital angewendet werden um den Grenzwert der Funktion an der Stelle $x = 0$ zu bestimmen.

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x} \overset{\text{l'H.}}{=} lim_{x\to 0}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \pi$$

2) Trapezregel und Trapezsumme

a) $f(x) = -x^2 + 4,\ a = -2,\ b = 2$

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\ dx = \int_{-2}^2 (-x^2+4)\ dx = [-\frac{1}{3}x^3 + 4x]_{-2}^2 \\
&= -\frac{8}{3} + 8 - (\frac{8}{3} - 8) = 16\cdot\frac{2}{3} = \boxed{10.\bar{6}} \\
Q_T(f) &= H\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} = H\cdot 0 = \boxed{0}
\end{aligned}$$

b) $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4$

$$\begin{aligned} I(g) &= \int_a^b g(x)\ dx = \int_0^4 x^4\ dx = [\frac{1}{5}x^5]_0^4 \\ &= \frac{1024}{5} = \boxed{204,8} \\ Q_T(g) &= H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} = 2 \cdot (0+256) = \boxed{512} \end{aligned}$$

c) Berechnung der Trapezsumme für $f(x) = -x^2 + 4,\ a = -2,\ b = 2,\ n = 8$
$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$
$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. $f(x) = f(-x)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f_i	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$	0

$$\begin{aligned} T_i &= (x_{i+1} - x_i) \cdot (\frac{y_{i+1} - y_i}{2}) = h \cdot (\frac{y_{i+1} - y_i}{2}) \\ \Rightarrow Q_{TS}(f;h) &= \sum_{i=0}^{n-1} T_i = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right) \\ &= h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \frac{f_8}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{7}{4} + 3 + \frac{15}{4} + 4 + \frac{15}{4} + 3 + \frac{7}{4} + 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot 21 = \boxed{10.5} \end{aligned}$$

Restglied:

$$R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{-2}{12} = \boxed{-\frac{1}{6}} = 10.5 - 16 \cdot \frac{2}{3} = Q_{TS}(f;h) - I(f)$$

$\Rightarrow$ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Trapezsumme

d) Berechnung der Trapezsumme für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4,\ n = 4$
$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
g_i	0	1	16	81	256

$$\begin{aligned} Q_{TS}(g;h) &= h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2} \right) \\ &= (0 + 1 + 16 + 81 + 128) = \boxed{226} \end{aligned}$$

Restglied:

$$\begin{aligned}|R_{TS}(g;h)| &= \left| h^2 \cdot H \cdot \frac{g^{(2)}(\xi)}{12} \right| = \left| 1 \cdot 4 \cdot \frac{12 \cdot \xi^2}{12} \right| = 4\left|\xi^2\right| \\ &\overset{\xi\in[0,4]}{\leq} 4 \cdot 16 = \boxed{64}\end{aligned}$$

3) Quadratur nach Romberg

a) Erste Spalte:

$$\begin{aligned}Q_{TS}(f;4) &= & 4\left(\tfrac{f(-2)+f(2)}{2}\right) && = 0 \\ Q_{TS}(f;2) &= & \tfrac{Q_{TS}(f;4)}{2} + 2f(0) = 0 + 4 \cdot 2 && = 8 \\ Q_{TS}(f;1) &= & \tfrac{Q_{TS}(f;2)}{2} + 1(f(-1) + f(1)) = 4 + 2 \cdot 3 && = 10\end{aligned}$$

Die Eigenschaft

$$Q_{TS}(f,h_{neu}) = Q_{TS}(f,h_2) + \frac{Q_{TS}(f,h_2) - Q_{TS}(f,h_1)}{\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}\right) - 1}.$$

verwendet man öfters bei Romberg-Quadratur. Damit kann man die Tabelle mit geringem Aufwand erweitern.

b)

$$\begin{aligned}Q_{11} &= Q_{10} + \tfrac{Q_{10}-Q_{00}}{\frac{16}{4}-1} = 8 + \tfrac{8}{3} &&= 10\frac{2}{3} \\ Q_{21} &= Q_{20} + \tfrac{Q_{20}-Q_{10}}{\frac{4}{1}-1} = 10 + \tfrac{2}{3} &&= 10\frac{2}{3} \\ Q_{22} &= Q_{21} + \tfrac{Q_{21}-Q_{11}}{\frac{16}{1}-1} = 10\tfrac{2}{3} + 0 &&= 10\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Dargestellt als Tableau (analog zum Schema von Aitken und Neville) sieht das Ganze wie folgt aus:

$$\begin{array}{c|c|ccccc} h_k & k & Q_{k0} & & Q_{k1} & & Q_{k2} \\ \hline 4 & 0 & 0 & & & & \\ & & & \searrow & & & \\ 2 & 1 & 8 & \rightarrow & 10\frac{2}{3} & & \\ & & & \searrow & & \searrow & \\ 1 & 2 & 10 & \rightarrow & 10\frac{2}{3} & \rightarrow & 10\frac{2}{3} \end{array}$$

Das mit Hilfe des Romberg-Verfahrens berechnete Integral ist in diesem Fall schon im Q_{11} exakt! Bis dahin haben wir nur 3 Auswertungen der Funktion verbraucht, im vergleich zu 9 bei der Trapezsumme im 2c), die noch nicht exakt war!

4) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

a) Berechnung der Fassregel für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4$

$$\begin{aligned} Q_S(g) &= h\left(\frac{f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}\right) \\ &= \frac{4}{6}(0 + 4 \cdot 16 + 256) = \frac{2}{3} \cdot 320 = \boxed{213.\bar{3}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fassregel besser als Trapezregel und Trapezsumme (für $n = 4$)

b) Simpsonsumme für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4,\ n = 4$ entspricht zwei Fassregeln, da fuer eine Fassregel zwei Intervalle benötigt werden.

$$\begin{aligned} Q_{SS}(g;h) &= \frac{h}{3} \cdot (g_0 + 4 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 + 4 \cdot g_3 + g_4) \\ &= \frac{h}{3}(0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 81 + 256) = \frac{1}{3} \cdot 616 = \boxed{205.\bar{3}} \end{aligned}$$

Restglied:

$$R_{SS}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} = 4 \cdot \frac{24}{180} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$\Rightarrow$ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Simpsonsumme