

## Numerisches Programmieren, Übungen

### Musterlösung 8. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

#### 1) Kondition von Anfangswertproblemen

(i) Die Lösung des AWP's bestimmen wir mittels Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 2y \\ \frac{dy}{2y} &= dt \\ \int_{y_0}^y \frac{1}{2\eta} d\eta &= \int_0^t d\tau \\ \frac{1}{2}(\ln |y| - \ln |y_0|) &= t - 0 \\ \left| \frac{y(t)}{y_0} \right| &= e^{2t} \\ y(t) &= \pm y_0 \cdot e^{2t}\end{aligned}$$

Da für  $t = 0$  als Anfangswert  $y(t = 0) = y_0$  gegeben ist, muss die +-Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{2t}$$

gelten.

Wenden wir uns nun der Betrachtung der (absoluten) Kondition zu: Im Fall von gestörten Anfangswerten

$$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$$

erhalten wir als Lösung des gestörten AWP's

$$y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{2t}.$$

Der Fehler nimmt folglich mit fortschreitender Zeit  $t$  zu:

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon| \cdot e^{2t} \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty$$

und die Kondition ist  $K_{abs} = e^{2t} \rightarrow \infty$ ,  
 $\Rightarrow$  schlecht-konditioniertes Problem!

(ii) Analog zum AWP (i) ergibt sich hier die Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-2t}.$$

Im Fall von gestörten Anfangswerten

$$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$$

erhalten wir als Lösung des gestörten AWP

$$y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{-2t}.$$

Der Fehler wird gedämpft:

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon| \cdot e^{-2t} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

und die Kondition ist  $K_{abs} = e^{-2t} \rightarrow 0$ ,  
 $\Rightarrow$  gut-konditioniertes Problem!

## 2) Einschrittverfahren

a) Wir berechnen die Separation (Trennung) der Variablen für  $\dot{y}(t) = t \cdot y(t) = F(t) \cdot G(y)$  mit  $F(t) = t$  und  $G(y) = y$ :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\ \frac{dy}{G(y)} &= F(t) dt \\ \int_{y(0)}^y \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_0^t F(\tau) d\tau \\ \int_{y(0)}^y \frac{1}{\eta} d\eta &= \int_0^t \tau d\tau \\ \ln|y| - \underbrace{\ln|y(0)|}_{=0} &= \frac{t^2}{2} \\ |y(t)| &= e^{\frac{t^2}{2}}, \quad t \in [0; b] \\ y(t) &= \pm e^{\frac{t^2}{2}}, \quad t \in [0; b]\end{aligned}$$

Wegen  $y(0) = 1 > 0$  gilt  $y(t) = +e^{\frac{t^2}{2}}$ ,  $t > 0$ .

b) Wir berechnen im Intervall  $[a; b] = [0; 4]$  zu den äquidistanten Zeitpunkten  $t_k = t_0 + k \cdot \delta t$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  eine numerische Approximation.

i) **Explizites Euler-Verfahren:**

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) = 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1, \\ y_2 &= y_1 + \delta t \cdot f(t_1, y_1) = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \\ y_3 &= y_2 + \delta t \cdot f(t_2, y_2) = 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 6, \\ y_4 &= y_3 + \delta t \cdot f(t_3, y_3) = 6 + 1 \cdot 3 \cdot 6 = 24.\end{aligned}$$

Die Werte der analytischen Lösung  $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$  betragen dagegen

$$\begin{aligned}y(t_1) &= e^{\frac{1}{2}} = 1.6487\dots, \\y(t_2) &= e^{\frac{4}{2}} = 7.3890\dots, \\y(t_3) &= e^{\frac{9}{2}} = 90.017\dots, \\y(t_4) &= e^{\frac{16}{2}} = 2980.9\dots\end{aligned}$$

ii) **Verfahren von Heun:**

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_0 \cdot y_0 + f(t_1, y_0 + \delta t \cdot t_0 \cdot y_0)) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 1) = \frac{3}{2}, \\y_2 &= y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_1 \cdot y_1 + f(t_2, y_1 + \delta t \cdot t_1 \cdot y_1)) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)\right) = \frac{21}{4} = 5.25, \\y_3 &= y_2 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_2 \cdot y_2 + f(t_3, y_2 + \delta t \cdot t_2 \cdot y_2)) = \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{21}{2} + 3 \cdot \left(\frac{21}{4} + \frac{42}{4}\right)\right) \\&= \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{189}{4} + \frac{42}{4}\right) = \frac{273}{8} = 34.125, \\y_4 &= y_3 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_3 \cdot y_3 + f(t_4, y_3 + \delta t \cdot t_3 \cdot y_3)) = \frac{273}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{273}{8} + 4 \cdot \left(\frac{273}{8} + 3 \cdot \frac{273}{8}\right)\right) \\&= \frac{273}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{273}{8} + 2 \cdot 273\right) = \frac{21}{16} \cdot 273 = 358,3\dots\end{aligned}$$

Im Vergleich zu den Werten der analytischen Lösung erkennt man, dass das Verfahren von Heun für diese (relativ großen) Zeitschritte durchaus noch einen nicht unerheblichen Fehler im Vergleich zur analytischen Lösung  $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$  macht, aber schon besser ist als das explizite Euler-Verfahren.

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren:**

Um einen globalen Runge-Kutta-Schritt zu machen, sind jeweils vier Subschritte  $T_1, \dots, T_4$  auszuführen:

$k = 0$ :

$$\begin{aligned}T_1 &= f(t_0, y_0) = t_0 \cdot y_0 = 0, \\T_2 &= f\left(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_1\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \\T_3 &= f\left(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}, \\T_4 &= f\left(t_1, y_0 + \delta t \cdot T_3\right) = 1 \cdot \frac{13}{8} = \frac{13}{8}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den ersten Gesamtschritt:

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = 1 + \frac{1}{6} \cdot \left(0 + 1 + \frac{5}{4} + \frac{13}{8}\right) \\&= 1 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{31}{8}\right) = \frac{79}{48} = 1,645\dots\end{aligned}$$

$k = 1$ :

$$\begin{aligned}T_1 &= f(t_1, y_1) = t_1 \cdot y_1 = \frac{79}{48}, \\T_2 &= f\left(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_1\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{79}{48} + \frac{79}{2 \cdot 48}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{79}{48} = \frac{711}{192} = \frac{237}{64}, \\T_3 &= f\left(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_2\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{79}{48} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{711}{192}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 79 + 711}{2 \cdot 192}\right) = \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}, \\T_4 &= f(t_2, y_1 + \delta t \cdot T_3) = 2 \cdot \left(\frac{79}{48} + \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}\right) = 2 \cdot \left(\frac{16 \cdot 79 + 3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}\right) = \frac{5293}{2 \cdot 192}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den zweiten Gesamtschritt:

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{79}{48} + \frac{711}{2 \cdot 48} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1343}{192} + \frac{5293}{2 \cdot 192}\right) \\&= \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{8 \cdot 79 + 4 \cdot 711 + 3 \cdot 1343 + 5293}{2 \cdot 192}\right) = \frac{79}{48} + \frac{12798}{2304} = \frac{16590}{48 \cdot 48} = 7,200 \dots\end{aligned}$$

Weitere Gesamtschritte ersparen wir uns in Anbetracht der relativ unschönen Brüche und überlassen diesem dem Computer (z.B. kurzes Matlab-Programm schreiben). Wir erhalten dann als Ergebnis

$$y_3 = 77.70 \dots,$$

$$y_4 = 1856.8 \dots$$

Das Klassische Runge-Kutta-Verfahren approximiert die analytischen Werte also noch etwas besser als das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun.

Je größer die Ordnung des Verfahrens (Euler: 1, Heun: 2, kl. Runge-Kutta: 4), desto besser die numerischen Ergebnisse.

### 3) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

a) Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -y^2 \\ -\frac{1}{y^2} dy &= 12 dt \\ -\int_{y(t_0)}^y \frac{1}{\eta^2} d\eta &= \int_{t_0}^t 12 d\tau \\ -\int_1^y \frac{1}{\eta^2} d\eta &= \int_1^t 12 d\tau \\ \frac{1}{y} - 1 &= 12t - 12 \\ y(t) &= \frac{1}{12t - 11}\end{aligned}$$

Damit gilt  $y(1.5) = \boxed{\frac{1}{7}}$

b) Explizites Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) \\ &= 1 + 0.5(-12 \cdot 1^2) = \boxed{-5}\end{aligned}$$

c) Implizites Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1}) \\ &= y_k - \delta t \cdot y_{k+1}^2\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Die explizite Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}0 &= 12\delta t \cdot y_{k+1}^2 + y_{k+1} - y_k \\ y_{k+1} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48hy_k}}{24h} \\ \xrightarrow{y(t) > 0} y_{k+1} &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 48hy_k}}{24h}\end{aligned}$$

Ein Zeitschritt mit dem impliziten Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 - 12\delta t \cdot y_1^2 \\ y_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 24 \cdot 1}}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

## Wiederholung: Gewöhnliche Differentialgleichungen

a)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + \mu \cdot y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -\mu dt \\ \int_{y_0}^y \frac{1}{\eta} d\eta &= - \int_2^t \mu d\tau \\ \ln y - \ln y_0 = \ln \frac{y}{y_0} &= -\mu \cdot (t - 2) \\ \frac{y}{y_0} &= e^{-\mu \cdot (t-2)} \\ y(t) &= y_0 e^{-\mu \cdot (t-2)}\end{aligned}$$

- b) – Für  $\mu > 0$ , da dann die Lösung durch eine negative exp-Funktion gegeben ist wird und dadurch z.B. Fehler in den Eingangsdaten dadurch gedämpft werden.  
– Für  $\mu = 0$ , da dann die Lösung konstant ist, und der Fehler sich nicht vergrößert.

c)

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1}) \\ &= y_k - \delta t \cdot \mu y_{k+1} \\ y_{k+1}(1 + \delta t \cdot \mu) &= y_k \\ y_{k+1} &= \frac{y_k}{1 + \delta t \cdot \mu} \\ \Rightarrow y_k &= \frac{y_0}{(1 + \delta t \cdot \mu)^k} \\ \Rightarrow y_4 &= \frac{y_0}{(1 + 0.25 \cdot 2)^4} = \frac{y_0}{(3/2)^4} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot y_0 = \frac{16}{81} \cdot y_0\end{aligned}$$

- d) – Newton-Verfahren  
– Bisektion  
– Sekanten-Verfahren

e)

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \delta t \cdot \varphi(y_0, t_0) \\ y(t_1) &= y(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{y}(t_0) + \mathcal{O}((t_1 - t_0)^2) \\ &= \underbrace{y_0 + \delta t \cdot \varphi(y_0, t_0)}_{y_1} + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ \Rightarrow |y(t_1) - y_1| &= \mathcal{O}(\delta t^2)\end{aligned}$$