Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Daniel Cremers
Dr. Frank Schmidt
Nikola Tchipev
Michael Rippl

WiSe 2016 / 2017

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 9. Übungsblatt: Fixpunktiteration

1) Banach'scher Fixpunktsatz

a) Die Fixpunktgleichung lautet

$$x = \Phi(x) = x(x^2 - 1) + x = x^3$$

und hat die drei Lösungen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Für die Entscheidung über die Anziehungskraft betrachten wir die erste Ableitung $\Phi'(x) = 3x^2$ und stellen fest:

- $\Phi'(x_0) = 0$, folglich ist x_0 ein anziehender Fixpunkt.
- $\Phi'(x_1) = 3$, folglich ist x_1 ein abstoßender Fixpunkt.
- $\Phi'(x_2) = 3$, folglich ist x_2 ein abstoßender Fixpunkt.

b) Wir definieren das Intervall $I := [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ und überprüfen die Bedingungen des Banach'schen Fixpunktsatzes:

- I ist abgeschlossen.
- Sei $x \in I$, also $|x| \leq \frac{1}{2}$, dann gilt $|\Phi(x)| = |x^3| < \frac{1}{2}$. Folglich ist Φ eine Abbildung von I nach I.
- Seien $x, y \in I$ beliebig. Mit dem Mittelwertsatz (MWS)

$$\exists \xi \in [a, b] : \; f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

angewendet auf Φ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= |x^3 - y^3| \overset{MWS}{\leq} |x - y| \cdot \max_{z \in [x,y]} |3z^2| \\ &\leq \max_{z \in I} (3z^2) \cdot |x - y| = \frac{3}{4}|x - y| \, . \end{aligned}$$

Also ist die letzte Bedingung mit $L = \frac{3}{4}$ erfüllt.

Folglich konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte aus dem Intervall $I := [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ gegen den Fixpunkt $x_0 = 0$.

2) Eigenwertbestimmung mit der Power-Iteration

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte analytisch:

$det(A - \lambda I) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = ... = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$

Scharf anschauen ergibt NS bei $\lambda_1 = 1$, weitere durch Polynomdivision: $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

b) Vektoriteration für max EW

Eigenvektor zum max EW:
$x_0 = (1, 0, 0)^T$
$x_1 = (-1/3, 2/3, 2/3)^T$
$x_2 = (-0.47963, 0.54815, 0.68519)^T$
$x_3 = (-0.47717, 0.49625, 0.72529)^T$
$x_4 = (-0.45964, 0.46545, 0.75636)^T$
$x_5 = (-0.44392, 0.44576, 0.77732)^T$

Eigenwert daraus berechnen:
Nach 3 Iter:
$\lambda_{max} = x_3^T A x_3 = 3.2768$
Nach 5 Iter:
$\lambda_{max} = x_5^T A x_5 = 3.0965$

c) Eigenvektor zum kleinsten EW:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Wähle $\mu = 0$ um nähesten an 0 liegenden EW zu bekommen (Betragsmäßig kleinster)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5/3 & 4/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren:
$x_0 = (1, 0)^T$
$x_1 = (0.92848, -0.37139)^T$
$x_2 = (0.90482, -0.42580)^T$
$x_3 = (0.89779, -0.44042)^T$
$x_4 = (0.89554, -0.44499)^T$
$x_5 = (0.89480, -0.44648)^T$

Eigenwert daraus berechnen:
Nach 3 Iter:
$\lambda_{min} = x_3^T A x_3 = 0.95463$
Nach 5 Iter:
$\lambda_{min} = x_5^T A x_5 = 0.99505$

Eigenwerte sind hier $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

d) Mittlerer Eigenwert

Wähle als Verschiebung $\mu = 0.5(\lambda_1 + \lambda_3)$ und verwende inverse Iteration. Funktioniert, da mu nun in der Mitte der beiden EW. Die Iteration konvergiert nun zum nächstgelegenen Eigenwert hin. Da wir nur 3 haben muss das Konvergenzziel auch der Mittlere sein.

3) Eigenwertbestimmung mit dem QR Verfahren und Gerschgorin-Kreisen

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Erste Abschätzung der EW Ein Eigenwert zwischen 1 und 5, der zweite zwischen 4 und 8. (Diagonalelement $\pm$ Restzeilenelemente)

b) QR Iterationen

$$Q_1 = qr(B) = \begin{pmatrix} -0.83205 & -0.55470 \\ -0.55470 & 0.83205 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = Q_1^T B Q_1 = \begin{pmatrix} 5.7692 & -2.1538 \\ -2.1538 & 3.2308 \end{pmatrix}$$

Eigenwert zwischen 3.6154 und 7.9230 bzw. 1.0770 und 5.3846

$$Q_2 = qr(B_1) = \begin{pmatrix} -0.93684 & 0.34975 \\ 0.34975 & 0.93684 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = Q_2^T B_2 Q_2 = \begin{pmatrix} 6.87018 & 0.79513 \\ 0.79513 & 2.12982 \end{pmatrix}$$

Eigenwert zwischen 6.0751 und 7.6653 bzw. 1.3347 und 2.9249

$$Q_3 = qr(B_2) = \begin{pmatrix} -0.99337 & -0.11497 \\ -0.11497 & 0.99337 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = Q_3^T B_3 Q_3 = \begin{pmatrix} 6.98914 & -0.23273 \\ -0.23273 & 2.01086 \end{pmatrix}$$

Eigenwert zwischen 6.7564 und 7.2219 bzw. 1.7781 und 2.2436

Man sieht, das die Spanne sich zuerst vergrößert, dann aber schnell kleiner wird.

c) Eigenwerte analytisch Berechnung mit $det(B - \lambda I) = 0$
Tatsächliche Eigenwerte sind 2 und 7

Wiederholung: Fixpunktiteration

a) Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right).$$

b) Wir lösen die Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{1}{2} \cdot x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Klassifikation:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ |\Phi'(+1)| &= 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{anziehend} \\ |\Phi'(-1)| &= 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{anziehend} \end{aligned}$$

c) Als Grenzwerte an den Rändern erhalten wir

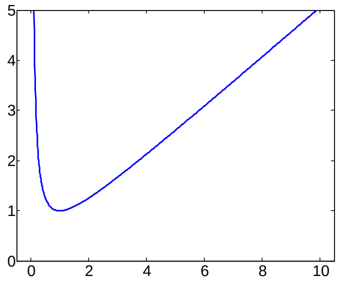
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \Phi(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Bestimmung von Extrema:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{(vgl. ii)!)} \\ \Rightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Folglich hat Φ im Intervall $]0, \infty[$ bei $(1|1)$ ein globales Minimum.

Graph von Φ:



d) i) Φ hat in $]0,\infty[$ ein globales Minimum bei $(1|1)$ (vgl. c))!).

ii) Aus $\Phi(x) \geq 1$ für $x > 0$ folgt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \geq 1$ wegen $x_0 > 0$ für $k = 1, 2, \ldots$.

iii) Wegen (2) ist $x_k \geq 1$, somit folgt für $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = \frac{1}{2}\left(x_k + \underbrace{\frac{1}{x_k}}_{1 \leq x_k}\right) \leq \frac{1}{2}(x_k + x_k) = x_k$$

Aus (1)-(3) folgt, dass x_k (für $k \geq 1$) nach unten beschränkt ist. Außerdem ist die Folge monoton fallend. Somit konvergiert die Iteration, falls $x_0 > 0$.

e) Wir setzen mit der Bedingung für einen Fixpunkt an:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} &= x \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x - \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f entsprechen den Fixpunkten von Φ und sind damit ± 1.

f) Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Funktion

$$f(x) := x - \Phi(x) = x - \frac{1}{x}$$

ergibt

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \frac{1}{x_k}}{1 + \frac{1}{x_k^2}} \\ &= x_k - \frac{x_k^2 - 1}{x_k} \cdot \frac{x_k^2}{x_k^2 + 1} = x_k - \frac{(x_k^2 - 1) \cdot x_k}{x_k^2 + 1}. \end{aligned}$$