

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 8. Übungsblatt: Gaußelimination mit Pivotsuche, LR-Zerlegung, Matrixnorm

1) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

- Ohne Spalten-Pivotsuche in exakter Arithmetik (d.h. keine Zeilenvertauschungen und ohne Runden rechnen)
- Ohne Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (korrektes Runden in dezimaler Gleitkomma-Darstellung mit 3 signifikanten Stellen. Bsp.: $0.01236 = 1.236 \cdot 10^{-2}$ ergibt 0.0124).
- Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in b).

Lösung:

- Gauß-Elimination ohne Pivotsuche und mit exakter Arithmetik:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 0 & 2001 & 2000 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{2000}{2001} = 0.9995\dots, \quad x_1 = (x_2 - 1) \cdot 1000 = -0.4997\dots \\ &\Rightarrow x = \boxed{\begin{pmatrix} -0.4997\dots \\ 0.9995\dots \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

- Gauß-Elimination ohne Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (3 Stellen):

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.000 \cdot 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2.001 \cdot 10^3 & 2.000 \cdot 10^3 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Runden}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1.00 \cdot 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2.00 \cdot 10^3 & 2.00 \cdot 10^3 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Der zweite Eintrag x_2 ist in Ordnung, aber x_1 ist komplett falsch!

c) Gauß-Elimination mit Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (3 Stellen):

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1000} & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2001}{2000} & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Runden}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x_2 = 1, \quad x_1 = -x_2/2 = -0.5 \\ &\Rightarrow x = \boxed{\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Diesmal ist x für beide Einträge in der passenden Größenordnung (vgl. i)).

2) LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir den Algorithmus der LR-Zerlegung aus der Vorlesung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.

Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:

1. **Zerlegung der Matrix A :** $A = L \cdot R$
2. **Vorwärtssubstitution:** $Ly = b$
3. **Rückwärtssubstitution:** $Rx = y$

a) Lösen Sie unter Verwendung der Gauß-Elimination das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (1.) der Matrix A .
- c) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe a).
- d) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

Lösung: Zunächst folgt eine kleine Einführung zur LR-Zerlegung. Zuerst wird die Matrix A in ein Produkt zweier Matrizen zerlegt, einmal in die linke untere Dreiecksmatrix L mit 1-ern auf der Diagonalen, und die rechte obere Dreiecksmatrix R . Daraufhin wird mit der Vorwärts- und der Rückwärtssubstitution das lineare Gleichungssystem gelöst. Eine mögliche Umsetzung der drei Abschnitte in Pseudocode sieht folgendermaßen aus:

1. LR-Zerlegung: $A = LR$

```

for i=1:n % Fuer jede Zeile i
    for k=1:i-1 % Berechne Elemente L[i,k]
        L[i,k] := A[i,k];
        for j=1:k-1
            L[i,k] := L[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
        end
        L[i,k] := L[i,k]/R[k,k];
    end

    for k=i:n % Berechne Elemente R[i,k]
        R[i,k] := A[i,k];
        for j=1:i-1
            R[i,k] := R[i,k]-L[i,j]*R[j,k];
        end
    end
end

```

2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$

```

for i=1:n
    y[i] := b[i];
    for j=1:i-1
        y[i] := y[i]-L[i,j]*y[j];
    end
end

```

3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

```

for i=n:-1:1
    x[i] := y[i];
    for j=i+1:n
        x[i] := x[i]-R[i,j]*x[j];
    end
    x[i] := x[i]/R[i,i];
end

```

Die Grundidee ist für die Algorithmen Gaußelimination und LR-Zerlegung natürlich die gleiche: Bringe A durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Der Gauß-Algorithmus eliminiert sukzessive Einträge in einer Spalte i (äußere Schleife), geht also spaltenweise vor. Dagegen berechnet unser LR-Algorithmus für jedes i der äußeren Schleife die Einträge von L und R in der Zeile i ; er arbeitet also zeilenweise. Die zweite Schleife über k läuft dementsprechend über die nötigen Spaltenindizes von L und R .

Um zu verstehen, warum der LR-Algorithmus die angegebene Form hat, betrachten wir die

Zerlegung genauer. $A = L \cdot R$ bedeutet in Indexnotation

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^n L_{ij} \cdot R_{jk}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

wobei n die Dimension der Matrix A ist. Die Einträge A_{ik} können in solche unterhalb bzw. oberhalb der Diagonalen aufgesplittet und getrennt betrachtet werden.

- $i > k$: Einträge unterhalb der Diagonalen: "Zeile mal Spalte" im Produkt $L \cdot R$ ergibt aufgrund der Nullen eine Summe, die nur bis k läuft (kleinerer der beiden Indizes):

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \sum_{j=1}^n L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^k L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot R_{jk} + L_{ik} \cdot R_{kk} \\ \Rightarrow L_{ik} &= \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot R_{jk} \right) / R_{kk}. \end{aligned}$$

- $i \leq k$: Einträge oberhalb der Diagonalen: Die Summe läuft nur bis i (kleinerer der beiden Indizes):

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \sum_{j=1}^n L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^i L_{ij} \cdot R_{jk} = \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot R_{jk} + L_{ii} \cdot R_{ik} \\ \Rightarrow R_{ik} &= \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot R_{jk} \right) / \underbrace{L_{ii}}_{=1}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir exakt die Formeln der LR-Zerlegung aus dem angegebenen Algorithmus. Man macht sich leicht klar, dass aufgrund des zeilenweisen Durchlaufs der äußeren Schleife (über i) stets alle nötigen Werte schon vorhanden sind, um die neuen Einträge L_{ik} und R_{ik} zu berechnen.

a) Lösungsschritte bei Anwendung von Gauß-Elimination auf das Problem $Ax = b$

$$\begin{array}{l} 1. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ 2. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & -11/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \end{array} \right) \end{array} \left| \begin{array}{l} 3. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\ 4. \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{array} \right. \\ \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- b) Für die Berechnung der Zerlegung (1.) von $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ stellen wir zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Die erste basiert auf den Algorithmen wie oben beschrieben und damit der Gaußelimination, die zweite auf dem Lösen von Gleichungen aus der Gleichung $A = LR$.

LR-Zerlegung basierend auf Gaußelimination Die Matrizen L und R denken wir uns mit lauter Nulleinträgen vorbelegt. Neu hinzukommende Einträge werden mit einer Box gekennzeichnet.

- $i=1$:

L : for $k = 1 : 0 \Rightarrow$ nichts zu tun (empty)

R : for $k = 1 : 3$

$$R[1, k] = A[1, k];$$

$$\text{for } j = 1 : 0 \Rightarrow \text{empty} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i=2$:

L : for $k = 1 : 1$

$$L[2, 1] = A[2, 1] = 2;$$

for $j = 1 : 0 \Rightarrow$ empty

$$L[2, 1] = L[2, 1]/R[1, 1] = 2/4; \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R : for $k = 2 : 3$

$$R[2, k] = A[2, k];$$

for $j = 1 : 1$

$$R[2, k] = R[2, k] - L[2, 1] \cdot R[1, k];$$

$$\rightarrow k = 2 : R[2, 2] = R[2, 2] - L[2, 1] \cdot R[1, 2] = 2 - 1/2 \cdot 2 = 1;$$

$$\rightarrow k = 3 : R[2, 3] = R[2, 3] - L[2, 1] \cdot R[1, 3] = 1 - 1/2 \cdot 3 = -1/2;$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i=3$:

$$\begin{aligned}
 L: \quad & \text{for } k = 1 : 2 \\
 & L[3, k] = A[3, k]; \\
 & \text{for } j = 1 : k - 1 \\
 & \quad \rightarrow k = 1 : \text{empty} \\
 & \quad \rightarrow k = 2 : L[3, 2] = L[3, 2] - L[3, 1] * R[1, 2] = 1; \\
 & L[3, k] = L[3, k] / R[k, k]; \quad \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R: \quad & \text{for } k = 3 : 3 \\
 & R[3, 3] = A[3, 3]; \\
 & \text{for } j = 1 : 2 \\
 & \quad R[3, 3] = R[3, 3] - L[3, j] \cdot R[j, 3]; \\
 & \quad \rightarrow j = 1 : R[3, 3] = 2 - 1/2 \cdot 3 = 1/2; \\
 & \quad \rightarrow j = 2 : R[3, 3] = 1/2 - 1 \cdot (-1/2); \\
 & \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir unsere gesuchte Zerlegung:

$$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LR-Zerlegung basierend auf Matrixmultiplikation Wir beginnen mit allen uns bekannten Informationen über die LR-Zerlegung von A :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Wir sehen 9 Unbekannte auf der rechten Seite, und für jeden der 9 Einträge in A entsteht eine Gleichung. Diese Gleichungen werden wir nun nacheinander (von oben nach unten oder von links nach rechts) durchgehen, und jedes Mal nach der fehlenden Unbekannten auflösen. Beginnen wir mit dem Feld $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$A_{11} = 4 \stackrel{!}{=} 1 \cdot R_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \Rightarrow R_{11} = 4.$$

Das Gleiche machen wir mit Feld $(2, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

und damit

$$A_{21} = 2 \stackrel{!}{=} L_{21} \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{2}.$$

Verfolgen wir dieses Vorgehen weiter, erhalten und lösen wir nacheinander folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} (1, 1) & 4 = 1 \cdot R_{11} & \Rightarrow R_{11} = 4 \\ (2, 1) & 2 = L_{21} \cdot 4 & \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{2} \\ (3, 1) & 2 = L_{31} \cdot 4 & \Rightarrow L_{31} = \frac{1}{2} \\ (1, 2) & 2 = 1 \cdot R_{21} & \Rightarrow R_{21} = 2 \\ (2, 2) & 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot R_{22} & \Rightarrow R_{22} = 1 \\ (3, 2) & 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + L_{32} \cdot 1 & \Rightarrow L_{32} = 1 \\ (1, 3) & 3 = 1 \cdot R_{13} & \Rightarrow R_{13} = 3 \\ (2, 3) & 1 = \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot R_{23} & \Rightarrow R_{23} = -\frac{1}{2} \\ (3, 3) & 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot -\frac{1}{2} + 1 \cdot R_{33} & \Rightarrow R_{33} = 1 \end{array}$$

Damit ergibt sich dann die selbe Lösung wie oben.

c) Substitution:

- Vorwärtssubstitution $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y = (5, -11/2, 3)^T.$$

- Rückwärtssubstitution $Rx = y$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11/2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x = (1, -4, 3)^T.$$

d) Die Zerlegung ist bereits bekannt, daher müssen zur Lösung von $Ax = c$ lediglich Vorwärts- und Rückwärtssubstitution durchgeführt werden. Der Aufwand hierfür ist $O(n^2)$ Operationen (vergleiche $O(n^3)$ Operationen für die Berechnung der Zerlegung bei der Lösung von $Ax = b$).

Substitution:

- Vorwärtssubstitution $L\tilde{y} = c$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{y} = (2, 0, 1)^T.$$

- Rückwärtssubstitution $Rx = \tilde{y}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x = (-1/2, 1/2, 1)^T.$$

3) Matrixnorm

Die Matrix-Grenzen-Norm-2 (auch als Spektralnorm bekannt) ist eine der wichtigsten Matrixnormen:

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

wobei die Vektornorm $\|\cdot\|_2$ die bekannte Euklidische Länge entspricht:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Zeigen Sie, dass **für eine diagonale Matrix D** gilt:

$$\|D\|_2 = \max_{i=1,\dots,n} |d_{ii}|.$$

Hinweis: Sei j so dass $|d_{jj}| = \max_{i=1,\dots,n} |d_{ii}|$. Zeigen Sie:

- $\|D\|_2 \geq |d_{jj}|$ (Betrachten Sie ein Eigenvektor zu Eigenwert d_{jj}),
- $\|D\|_2 \leq |d_{jj}|$.

(Im Allgemeinen, die 2-Norm von A ist gleich dem größten Singulärwert von A : $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sigma_{\max}(A)$.)

Lösung:

- $\|D\|_2 \geq |d_{jj}|$.

Sei e_j der Vektor mit 1 an der Stelle j und 0 an alle andere Stellen:

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j.$$

e_j ist ein Eigenvektor zu Eigenwert d_{jj} : $De_j = d_{jj}e_j$. Dann:

$$\|D\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|De_j\|_2}{\|e_j\|_2} = \frac{\|d_{jj}e_j\|_2}{1} = |d_{jj}| \|e_j\|_2 = |d_{jj}|$$

- $\|D\|_2 \leq |d_{jj}|$:

$$\begin{aligned}
\|D\|_2 &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x_1^2 d_{11}^2 + x_2^2 d_{22}^2 + \dots + x_n^2 d_{nn}^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\
&\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x_1^2 d_{jj}^2 + x_2^2 d_{jj}^2 + \dots + x_n^2 d_{jj}^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\
&= \sup_{x \neq 0} |d_{jj}| \frac{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\
&= \sup_{x \neq 0} |d_{jj}| \\
&= |d_{jj}|.
\end{aligned}$$

Zum Schluss:

- $\|D\|_2 \leq |d_{jj}|$,
- $\|D\|_2 \geq |d_{jj}|$,

dann muss $\|D\|_2 = |d_{jj}|$ gelten.

4) Orthogonale Matrizen

Eine Matrix Q heißt Orthogonal, wenn gilt

$$QQ^T = Q^T Q = I,$$

wobei I der Einheitsmatrix entspricht.

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften orthogonaler Matrizen:

- a) $\det Q = \pm 1$,
- b) $\|Q\|_2 = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie $\det(AB) = \det A \det B$ und $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$.

Zusatz: Wie stellen sich diese Eigenschaften für 2×2 diagonale Matrizen graphisch dar? Zeichnen Sie die Kurven $\det D = \pm 1$, und $\|D\|_2 = 1$ in einem Diagramm von d_{22} gegen d_{11} .

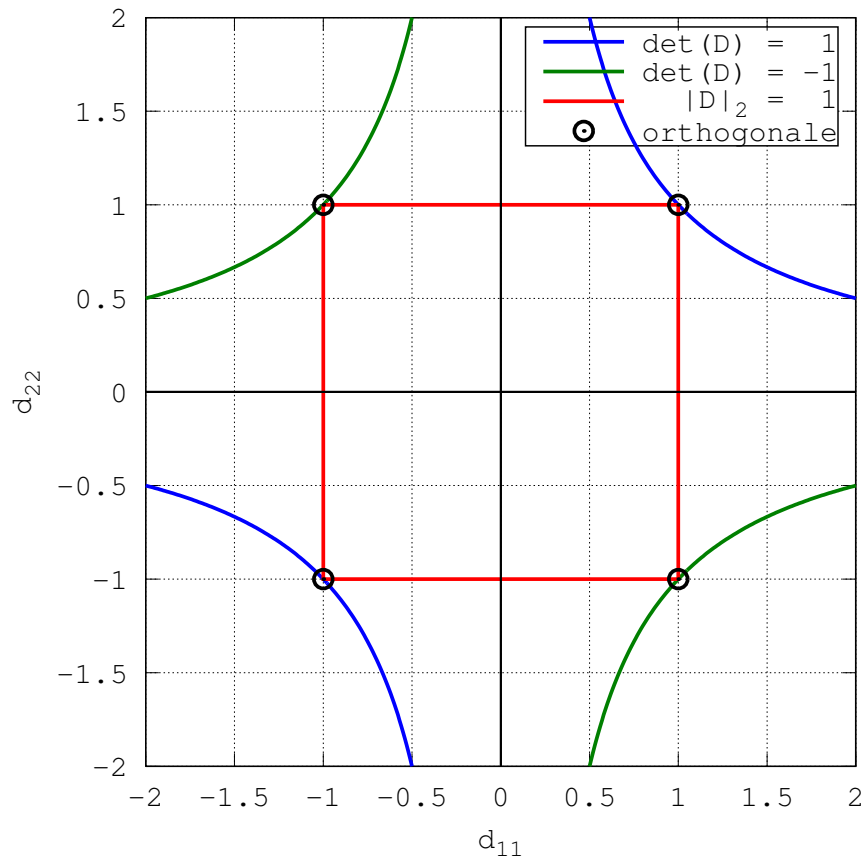
Lösung:

- a) $\det Q = \pm 1$:
 $1 = \det I = \det(QQ^T) = \det Q \det Q^T = (\det Q)^2$.
Die Gleichung $x^2 = 1$ hat nur ± 1 als Lösungen.

b) $\|Q\|_2 = 1$:

$$\|Q\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T Q^T Q x}}{\sqrt{x^T x}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T I x}}{\sqrt{x^T x}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T x}}{\sqrt{x^T x}} = \sup_{x \neq 0} 1 = 1$$

Zusatz:



Unter 2×2 diagonale Matrizen gibt es 4 orthogonale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe: Image Stitching mit Gauß-Elimination

In dieser Aufgabe verwenden wir die Gauß-Elimination zum Lösen linearer Gleichungssysteme im Bereich des Rechnersehens. Eine der Aufgaben, die durch Techniken der Bildverarbeitung bewältigt werden, ist das Zusammensetzen von Einzelbildern (engl. image stitching) bzw. die Erzeugung von Panoramabildern.

Will man zwei Bilder I_1 und I_2 "aneinandernähen", detektiert der entsprechende Algorithmus zunächst sogenannte Merkmalspunkte (engl. feature points) in beiden Bildern. Unter der Annahme, dass beide Bilder einen gemeinsamen Teil einer Szenerie zeigen, gibt es solche Merkmalspunkte in beiden Bildern. Anschließend findet eine Verknüpfung der Merkmalspunkte im ersten Bild I_1 mit den zugehörigen Punkten im Bild I_2 statt, wie in Abbildung 1 gezeigt.

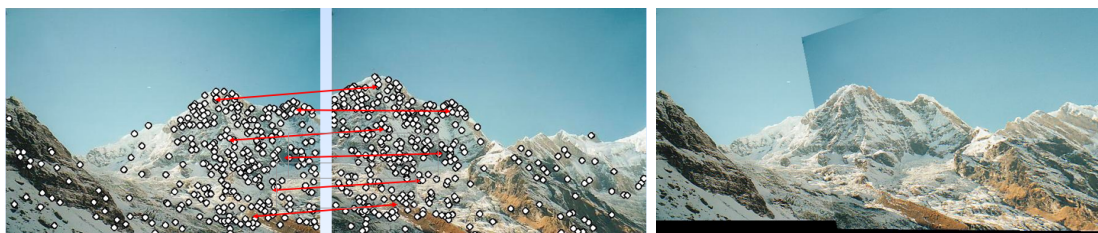


Abbildung 1: Image stitching.

In der Praxis treten viele Fehler beim Finden gemeinsamer Bildmerkmale auf. Allerdings gehen wir hier von perfekten Beziehungen zwischen den Punkten aus. Da sich die Punkte in der Bildebene befinden, existiert eine lineare Transformation H (im Englischen als homomorphism bezeichnet), die die Mengen von Merkmalspunkten aufeinander abbildet. Bezeichnet man die Merkmalspunkte in Bild I_1 als $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ und in Bild I_2 als $\mathbf{x}'_i, i = 1, \dots, n$, so kann die Korrespondenz zwischen ihnen durch $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$ ausgedrückt werden.

Aufgabe: Gegeben seien die beiden Punktepaare

| | |
|--|---|
| I_1 | I_2 |
| $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ | $x'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ |
| $x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $x'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ |

Bestimmen Sie die entsprechende 2x2-Transformationsmatrix H .

Lösung: Gegeben seien zwei Merkmalspunkte $\mathbf{x}_1 = [3 \ 2]^T$ und $\mathbf{x}_2 = [4 \ 3]^T$ im Bild I_1 und deren korrespondierende Punkte $\mathbf{x}'_1 = [1 \ 2]^T$ und $\mathbf{x}'_2 = [2 \ 4]^T$ im anderen Bild I_2 . Wie bereits erwähnt, lässt sich der Zusammenhang zwischen korrespondierenden Punkten über die Transformation $\mathbf{x}' = H \cdot \mathbf{x}$ ausdrücken. Nun gilt es die Einträge der "Homography-Matrix" zu finden.

Notieren wir zunächst den bekannten Zusammenhang für das erste Paar korrespondierender Punkte:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= H \cdot \mathbf{x}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{x}'_2 &= H \cdot \mathbf{x}_2 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach der Matrix-Vektor-Multiplikation erhalten wir ein System mit vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$.

$$\begin{aligned}
3h_{11} + 2h_{12} &= 1 \\
3h_{21} + 2h_{22} &= 2 \\
4h_{11} + 3h_{12} &= 2 \\
4h_{21} + 3h_{22} &= 4
\end{aligned}$$

Durch Tauschen der zweiten und dritten Gleichung erhalten wir das folgende (lineare) Gleichungssystem, das wir mittels Gauß-Elimination lösen:

$$A \cdot \mathbf{h} = b \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Die Gauß-Elimination erfolgt wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} / \cdot \frac{4}{3} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ / \cdot \frac{4}{3} \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & | & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich leicht $h_{22} = 4$, $h_{21} = -2$, $h_{12} = 2$, $h_{11} = -1$ berechnen.

Weiterer Lösungsweg: $Hx_1 = x_1'$ und $Hx_2 = x_2'$ lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
H \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1' & x_2' \end{bmatrix} \quad |^T \\
\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{bmatrix} H^T &= \begin{bmatrix} x_1'^T \\ x_2'^T \end{bmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} H^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\text{Gauß: } \begin{pmatrix} 3 & 2 & | & 1 & 2 \\ 4 & 3 & | & 2 & 4 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & | & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & | & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow H^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und damit folgt die Lösung $H = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.