Technische Universität München
Institut für Informatik
Univ.-Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Michael Obersteiner
Philipp Samfass

WiSe 2017 / 2018

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 9. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

1) Kondition von Anfangswertproblemen

Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ der beiden folgenden Anfangswertprobleme (AWP) mit Hilfe der Separation der Variablen und diskutieren Sie jeweils die Kondition:

a) $\dot{y}(t) = 2y(t), \quad y(0) = y_0, \ t \geq 0,$

b) $\dot{y}(t) = -2y(t), \ y(0) = y_0, \ t \geq 0.$

Lösung:

a) Die Lösung des AWPs bestimmen wir mittels Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= 2y \\
\frac{dy}{2y} &= dt \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{2\eta} d\eta &= \int_0^t d\tau \\
\frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|y_0|) &= t - 0 \\
\left|\frac{y(t)}{y_0}\right| &= e^{2t} \\
y(t) &= \pm y_0 \cdot e^{2t}
\end{aligned}$$

Da für $t = 0$ als Anfangswert $y(t = 0) = y_0$ gegeben ist, muss die $+$-Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{2t}$$

gelten.

Wenden wir uns nun der Betrachtung der (absoluten) Kondition zu: Im Fall von gestörten Anfangswerten

$$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$$

erhalten wir als Lösung des gestörten AWPs

$$y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{2t}.$$

Der Fehler nimmt folglich mit fortschreitender Zeit t zu:

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon| \cdot e^{2t} \to \infty \text{ für } t \to \infty$$

$\Rightarrow$ schlecht-konditioniertes Problem!

b) Analog zum AWP (i) ergibt sich hier die Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-2t}.$$

Im Fall von gestörten Anfangswerten

$$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$$

erhalten wir als Lösung des gestörten AWPs

$$y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{-2t}.$$

Der Fehler wird gedämpft:

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon| \cdot e^{-2t} \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

$\Rightarrow$ gut-konditioniertes Problem!

2) Einschrittverfahren

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = t \cdot y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

b) Berechnen Sie im Intervall $[0; 4]$ numerische Lösungswerte y_k, welche die Lösung $y(t)$ in den Stellen t_k approximieren, d.h. $y_k \approx y(t_k)$. Rechnen Sie mit Schrittweite $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$ und verwenden Sie die folgenden Verfahren:

i) **Explizites Euler-Verfahren**:

Bei diesem Verfahren wird lediglich die Steigung im aktuellen Punkt t_k zur Berechnung der numerischen Lösung betrachtet:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k); \end{aligned}$$

ii) **Verfahren von Heun**:

Analog zur Trapezregel bei der Quadratur wird bei diesem Verfahren im Vergleich zum Euler-Verfahren ein zweiter f-Wert zur numerischen Berechnung der Steigung hinzugezogen:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k))\right); \end{aligned}$$

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren**:

Analog zur Fassregel werden hier Zwischenwerte T_i für die Näherung der Steigung berechnet und mit 1/6 gewichtet:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ T_1 &= f(t_k,\ y_k); \\ T_2 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_1); \\ T_3 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_2); \\ T_4 &= f(t_{k+1},\ y_k + \delta t T_3); \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{6} \cdot (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)\,; \end{aligned}$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse der einzelnen Verfahren mit der analytischen Lösung. Was stellen Sie fest und wie lässt sich dies deuten?

Lösung:

a) Wir berechnen die Separation (Trennung) der Variablen für $\dot{y}(t) = t \cdot y(t) \; = \; F(t) \cdot G(y)$ mit $F(t) = t$ und $G(y) = y$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\ \frac{dy}{G(y)} &= F(t)dt \\ \int_{y(0)}^{y} \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_0^t F(\tau) d\tau \\ \int_{y(0)}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta &= \int_0^t \tau d\tau \\ ln|y| - \underbrace{ln|y(0)|}_{=0} &= \frac{t^2}{2} \\ |y(t)| &= e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in [0; b] \\ y(t) &= \pm e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in [0; b] \end{aligned}$$

Wegen $y(0) = 1 > 0$ gilt $y(t) = +e^{\frac{t^2}{2}},\ t > 0$.

b) Wir berechnen im Intervall $[a; b] = [0; 4]$ zu den äquidistanten Zeitpunkten $t_k = t_0 + k \cdot \delta t$, $k = 1, 2, 3, 4$ eine numerische Approximation.

i) **Explizites Euler-Verfahren**:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) &&= 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1,\\
y_2 &= y_1 + \delta t \cdot f(t_1, y_1) &&= 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2,\\
y_3 &= y_2 + \delta t \cdot f(t_2, y_2) &&= 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 6,\\
y_4 &= y_3 + \delta t \cdot f(t_3, y_3) &&= 6 + 1 \cdot 3 \cdot 6 = 24.
\end{aligned}$$

Die Werte der analytischen Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ betragen dagegen

$$\begin{aligned}
y(t_1) &= e^{\frac{1}{2}} = 1.6487\ldots,\\
y(t_2) &= e^{\frac{4}{2}} = 7.3890\ldots,\\
y(t_3) &= e^{\frac{9}{2}} = 90.017\ldots,\\
y(t_4) &= e^{\frac{16}{2}} = 2980.9\ldots.
\end{aligned}$$

ii) **Verfahren von Heun**:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_0 \cdot y_0 + f(t_1, y_0 + \delta t \cdot t_0 \cdot y_0)) &&= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 1) \;=\; \frac{3}{2},\\
y_2 &= y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_1 \cdot y_1 + f(t_2, y_1 + \delta t \cdot t_1 \cdot y_1)) &&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 2 \cdot (\frac{3}{2} + \frac{3}{2})) \;=\; \frac{21}{4} = 5.25,\\
y_3 &= y_2 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_2 \cdot y_2 + f(t_3, y_2 + \delta t \cdot t_2 \cdot y_2)) &&= \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{21}{2} + 3 \cdot (\frac{21}{4} + \frac{42}{4}))\\
&= \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{189}{4} + \frac{42}{4}) \;=\; \frac{273}{8} = 34.125,\\
y_4 &= y_3 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_3 \cdot y_3 + f(t_4, y_3 + \delta t \cdot t_3 \cdot y_3)) &&= \frac{273}{8} + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \frac{273}{8} + 4 \cdot (\frac{273}{8} + 3 \cdot \frac{273}{8}))\\
&= \frac{273}{8} + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \frac{273}{8} + 2 \cdot 273) \;=\; \frac{21}{16} \cdot 273 = 358,3\ldots\;.
\end{aligned}$$

Im Vergleich zu den Werten der analytischen Lösung erkennt man, dass das Verfahren von Heun für diese (relativ großen) Zeitschritte durchaus noch einen nicht unerheblichen Fehler im Vergleich zur analytischen Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ macht, aber schon besser ist als das explizite Euler-Verfahren.

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren**:

Um einen globalen Runge-Kutta-Schritt zu machen, sind jeweils vier Subschritte $T_1, \ldots, T_4$ auszuführen:

<u>$k = 0$:</u>

$$\begin{aligned}
T_1 &= f(t_0, y_0) &&= t_0 \cdot y_0 = 0,\\
T_2 &= f(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_1) &&= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},\\
T_3 &= f(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_2) &&= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8},\\
T_4 &= f(t_1, y_0 + \delta t \cdot T_3) &&= 1 \cdot \frac{13}{8} = \frac{13}{8}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den ersten Gesamtschritt:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = 1 + \frac{1}{6} \cdot (0 + 1 + \frac{5}{4} + \frac{13}{8}) \\ &= 1 + \frac{1}{6} \cdot (\frac{31}{8}) = \frac{79}{48} = 1,645\ldots\ . \end{aligned}$$

<u>$k = 1$:</u>

$$\begin{aligned} T_1 &= f(t_1, y_1) \ = \ t_1 \cdot y_1 = \frac{79}{48}, \\ T_2 &= f(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_1) \ = \ \frac{3}{2} \cdot (\frac{79}{48} + \frac{79}{2 \cdot 48}) = \frac{9}{4} \cdot \frac{79}{48} = \frac{711}{192} = \frac{237}{64}, \\ T_3 &= f(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_2) \ = \ \frac{3}{2} \cdot (\frac{79}{48} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{711}{192}) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{2 \cdot 4 \cdot 79 + 711}{2 \cdot 192}) = \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}, \\ T_4 &= f(t_2, y_1 + \delta t \cdot T_3) \ = \ 2 \cdot (\frac{79}{48} + \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}) \ = \ 2 \cdot (\frac{16 \cdot 79 + 3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}) = \frac{5293}{2 \cdot 192}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den zweiten Gesamtschritt:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot (\frac{79}{48} + \frac{711}{2 \cdot 48} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1343}{192} + \frac{5293}{2 \cdot 192}) \\ &= \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot (\frac{8 \cdot 79 + 4 \cdot 711 + 3 \cdot 1343 + 5293}{2 \cdot 192}) = \frac{79}{48} + \frac{12798}{2304} = \frac{16590}{48 \cdot 48} = 7,200\ldots\ . \end{aligned}$$

Weitere Gesamtschritte ersparen wir uns in Anbetracht der relativ unschönen Brüche und überlassen diesem dem Computer (z.B. kurzes Matlab-Programm schreiben). Wir erhalten dann als Ergebnis

$$y_3 = 77.70\ldots,$$

$$y_4 = 1856.8\ldots$$

Das Klassische Runge-Kutta-Verfahren approximiert die analytischen Werte also noch etwas besser als das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun.

Je größer die Ordnung des Verfahrens (Euler: 1, Heun: 2, kl. Runge-Kutta: 4), desto besser die numerischen Ergebnisse.

3) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Gegeben sei das folgende AWP:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -12(y(t))^2 \qquad \forall\, t \geq 1, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dabei ist bekannt, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 1$ gilt. Gesucht ist eine Näherungslösung $y_1 \approx y(t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 1.5$.

a) Lösen Sie das AWP analytisch mit Hilfe der Separation der Variablen und berechnen Sie die exakte Lösung $y(1.5)$!

b) Berechnen Sie y_1 mit Hilfe des expliziten Eulers.

c) Wenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

zur Berechnung von y_1 an, und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

Lösung:

a) Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -y^2 \\ -\frac{1}{y^2}\, dy &= 12\, dt \\ -\int_{y(t_0)}^{y} \frac{1}{\eta^2}\, d\eta &= \int_{t_0}^{t} 12\, d\tau \\ -\int_{1}^{y} \frac{1}{\eta^2}\, d\eta &= \int_{1}^{t} 12\, d\tau \\ \frac{1}{y} - 1 &= 12t - 12 \\ y(t) &= \frac{1}{12t - 11} \end{aligned}$$

Damit gilt $y(1.5) = \boxed{\frac{1}{7}}$

b) Explizites Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + 0.5(-12 \cdot 1^2) = \boxed{-5} \end{aligned}$$

c) Implizites Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1}) \\ &= y_k - h \cdot y_{k+1}^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die explizite Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= 12hy_{k+1}^2 + y_{k+1} - y_k \\ y_{k+1} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48hy_k}}{24h} \\ \overset{y(t)>0}{\Longrightarrow} \quad y_{k+1} &= \frac{-1 + \sqrt{1+48hy_k}}{24h} \end{aligned}$$

Ein Zeitschritt mit dem impliziten Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 - 12h \cdot y_1^2 \\ y_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1+24 \cdot 1}}{12} = \boxed{\tfrac{1}{3}} \end{aligned}$$