Technische Universität München
Institut für Informatik
Univ.-Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Michael Obersteiner
Philipp Samfass

WiSe 2017 / 2018

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 11. Übungsblatt: Iterative Verfahren I

1) Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme

Für große lineare Gleichungssyteme kann es unter Effizienzgesichtspunkten interessant sein, anstelle der direkten Gauss-Elimination, ein iteratives Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems zu verwenden. Die vielleicht einfachsten Varianten iterativer Löser werden u.a. als *Splitting-Verfahren* bezeichnet.

a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, M \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}^n$, der den Splitting-Verfahren zugrundeliegenden Iterationsfunktion

$$\Phi(x) := x + M^{-1}(b - Ax) \ , \tag{1}$$

auch die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist!

b) Durch Festlegung der Matrix M in Formel (1) erhält man unterschiedliche Splitting-Verfahren. Bei der Auswahl von M sollten folgende Kriterien berücksichtigt werden:

   (i) M sollte möglichst schnell invertierbar sein und

   (ii) M sollte die Matrix A möglichst gut approximieren!

   Ordnen Sie die Vorschläge $M_1 = I_n$, $M_2 = A$ und $M_3 = diag(A)$ nach dem Grad der Erfüllung der beiden obigen Kriterien.

c) Entwickeln Sie einen Pseudo-Code für die Durchführung einer Iteration nach Formel (1) unter Verwendung von $M_3 = diag(A)$!

d) Das in Teilaufgabe c) entwickelte Verfahren wird Jacobi-Verfahren genannt. Es lässt sich hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit und Speicherbedarf noch deutlich verbessern. Machen Sie einen Vorschlag zur Verbesserung des Verfahrens! Wie ändert sich dadurch die Iterationsvorschrift in Matrixnotation?

Lösung:

a) $x_* = x_* + M^{-1}(b - Ax_*) \Leftrightarrow$
   $0 = M^{-1}(b - Ax_*) \Leftrightarrow$
   $0 = b - Ax_* \Leftrightarrow$
   $Ax_* = b$

b)

Matrix	Invertierbarkeit	Approximation von A
I_n	schnell	schlecht
A	langsam	gut
$diag(A)$	mittel	mittel

c) $M_3 = diag(A)$
$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = x^{(k)} + diag(A)^{-1}(b - Ax^{(k)})$
Betrachtet man nur eine Komponente von $x^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} (a_{ij} x_j^{(k)}) - a_{ii} x_i^{(k)} \right) \\ &= \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} (a_{ij} x_j^{(k)}) \right) \end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgender Pseudo-Code entwickeln:

```
function jacobi
   for i = 1:n
      summe = b(i);
      for l = 1:n
        if (l != i)
          summe -= a(i,l)*x_alt(l);
        end
      end
      x_neu(i) =  summe/a(i,i);
   end
return;
```

d) Idee: Alte Approximation sofort überschreiben.
Verfahren: Die Matrix M ist nun anstatt der Diagonalen von A das komplette linke, untere Dreieck (inklusive Diagonale) von A.

2) Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems mittels Gauß-Elimination.

b) Führen Sie drei Schritte des Jacobi-Verfahrens durch um eine näherungsweise Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu erhalten. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)}$ den Nullvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

   Vergleichen Sie ihr Endergebnis $x^{(3)}$ mit der exakten Lösung aus Teilaufgabe a).

c) Führen Sie zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens durch um eine näherungsweise Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu erhalten. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)}$ wieder den Nullvektor.

   Vergleichen Sie abschließend ihr Endergebnis $x^{(2)}$ mit der exakten Lösung aus Teilaufgabe a) und mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

Lösung:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right)$

Rückwärtssubstitution:

$x_3 = 0$
$\frac{3}{2}x_2 + 0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -1$
$2x_1 + 1 + 0 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$

Endergebnis: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) • $i = 0$:

$$\begin{aligned}
r^{(0)} &= b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
y_1^{(0)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
y_2^{(0)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
y_3^{(0)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(0)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
x^{(1)} &= x^{(0)} + y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $i = 1$:

$$\begin{aligned}
r^{(1)} &= b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
y_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
y_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(1)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
x^{(2)} &= x^{(1)} + y^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $i = 2$:

$$\begin{aligned}
r^{(2)} &= b - Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \\
y_1^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
y_2^{(2)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
y_3^{(2)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
x^{(3)} &= x^{(2)} + y^{(2)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c)
- $i = 0$:
  - $k = 1$:

$$\begin{aligned}
r_1^{(0)} &= b_1 - \sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j^{(0)} = \\
&= -1 - (0) - (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0) = -1 \\
y_1^{(0)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} + y_1^{(0)} = 0 + -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- $k = 2$:

$$\begin{aligned} r_2^{(0)} &= b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^{(1)} - \sum_{j=2}^{3} a_{2j} x_j^{(0)} = \\ &= -1 - (-1 \cdot -\frac{1}{2}) - (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0) = -\frac{3}{2} \\ y_2^{(0)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \\ x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} + y_2^{(0)} = 0 + -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

- $k = 3$:

$$\begin{aligned} r_3^{(0)} &= b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j^{(1)} - \sum_{j=3}^{3} a_{3j} x_j^{(0)} = \\ &= 0 - (1 \cdot -\frac{1}{2} + (-1) \cdot -\frac{3}{4}) - (-2 \cdot 0) = -\frac{1}{4} \\ y_3^{(0)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(0)} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{8} \\ x_3^{(1)} &= x_3^{(0)} + y_3^{(0)} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- $i = 1$:
  - $k = 1$:

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= b_1 - \sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^{(2)} - \sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j^{(1)} = \\ &= -1 - 0 - (2 \cdot -\frac{1}{2} + (-1) \cdot -\frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8}) = -\frac{7}{8} \\ y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{7}{8} = -\frac{7}{16} \\ x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} + y_1^{(1)} = -\frac{1}{2} + -\frac{7}{16} = -\frac{15}{16} \end{aligned}$$

  - $k = 2$:

$$\begin{aligned} r_2^{(1)} &= b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^{(2)} - \sum_{j=2}^{3} a_{2j} x_j^{(1)} = \\ &= -1 - (-1 \cdot -\frac{15}{16}) - (2 \cdot -\frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{8}) = -\frac{5}{16} \\ y_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{5}{16} = -\frac{5}{32} \\ x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} + y_2^{(1)} = -\frac{3}{4} + -\frac{5}{32} = -\frac{29}{32} \end{aligned}$$

- $k = 3$:

$$\begin{aligned}
r_3^{(1)} &= b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j^{(2)} - \sum_{j=3}^{3} a_{3j} x_j^{(1)} = \\
&= 0 - (1 \cdot -\frac{15}{16} + (-1) \cdot -\frac{29}{32}) - (-2 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{9}{32} \\
y_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{32} = -\frac{9}{64} \\
x_3^{(2)} &= x_3^{(1)} + y_3^{(1)} = \frac{1}{8} + -\frac{9}{64} = -\frac{1}{64}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{16} \\ -\frac{29}{32} \\ -\frac{1}{64} \end{pmatrix}$$

3) Verfahren des steilsten Abstiegs

Führen Sie zwei Schritte des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* (steepest descent) aus, um eine iterative Lösung für das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Gesucht ist also $x^{(2)}$. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jede Iteration des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* entspricht dabei den folgenden drei Schritten:

1) Berechnung des aktuellen Residuums $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$
2) Berechnung der optimalen Schrittweite $\alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)T} r^{(i)}}{r^{(i)T} A r^{(i)}}$
3) Berechnung des aktuellen Zwischenergebnisses $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha^{(i)} r^{(i)}$

Lösung: Erste Iteration:

$$\begin{aligned}
r^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\alpha^{(0)} &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \\
x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zweite Iteration:

$$
\begin{aligned}
r^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\alpha^{(1)} &= \frac{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \\
x^{(2)} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4) Spezielle Newton-Verfahren

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = mx + b$.

(i) Bestimmen Sie die Nullstelle von f auf direktem Weg!

(ii) Formulieren Sie für die Funktion f das Newton-Verfahren! Nach wievielen Iterationen hat das Verfahren die Nullstelle gefunden?

b) (i) Formulieren Sie das Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (alternativ: $f(x) = x^2 - 8x + 15$)!

(ii) Berechnen Sie die ersten 4 Iterierten sowohl für den Startwert $x_0 = 2$ als auch für den Startwert $\tilde{x}_0 = -2$ (alternativ: $x_0 = 2$ und $\tilde{x}_0 = 6$)! Gegen welche Werte konvergieren die beiden Folgen der Iterierten?

Lösung:

a) (i) $x_* = -\frac{b}{m}$

(ii) $x_{k+1} = -\frac{b}{m}$ beschreibt direkt die Nullstelle!
(direktes Einsetzen in Funktion liefert 0)

b) (i)

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 3}{2x_k - 2}$$

und alternativ:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 15}{2x_k - 8}$$

(ii)

	$x_{k+1} = \frac{x_k^2+3}{2x_k-2}$		$x_{k+1} = \frac{x_k^2-15}{2x_k-8}$	
x_0	2	-2	2	6
x_1	$3,5$	$-1,16667$	$2,75$	$5,25$
x_2	$3,05$	$-1,00641$	$2,975$	$5,025$
x_3	$3,0006$	$-1,000010$	$2,9997$	$5,0030$
x_4	$3,00000$	$-1,0$	$3,000000$	$5,0000000$

Man beobachtet lokale Konvergenz zu jeweils beiden Nullstellen beider Parabeln, da die angegebenen Startwerte entsprechend gewählt sind.

Vertiefung: Konvergenz des Verfahrens des steilsten Abstiegs

a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$||x^* - x^{(k+1)}||_A \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}\right) ||x^* - x^{(k)}||_A,$$

wobei $||x||_A := \sqrt{x^T A x}$ gilt. x^* bezeichnet das Minimum von (**??**).

Hinweise:

- Betrachten Sie den Ausdruck

$$\frac{||x^* - x^{(k+1)}||_A^2}{||x^* - x^{(k)}||_A^2}$$

und setzen Sie die Iterationsvorschrift ein.

- Um den Ausdruck zu vereinfachen, beachten Sie die Beziehung zwischen dem Fehler $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$ und dem Residuum $r^{(k)} = b - A\,x^{(k)}$:

$$r^{(k)} = -A\,e^{(k)}.$$

- Verwenden Sie abschließend die *Ungleichung von Kantorovic* für symmetrisch positiv definite Matrizen A:

$$\frac{x^T A x \cdot x^T A^{-1} x}{(x^T x)^2} \leq \frac{(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A))^2}{4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(A)}.$$

Ein Beweis der Ungleichung ist nicht notwendig.

b) Für symmetrisch positiv definite Matrizen gilt

$$\kappa_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) die folgende Fehlerabschätzung für die Methode des steilsten Abstiegs:

$$||x^* - x^{(k)}||_A \leq \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1}\right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A.$$

Was bedeutet dies für die Konvergenz des Verfahrens im Fall von Matrizen A mit sehr großen Konditionszahlen $\kappa_2(A)$?

Lösung:

a) Nutzen wir die Beziehungen

$$A(x^* - x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} = r^{(k)}, \qquad x^* - x^{(k)} = A^{-1} r^{(k)}, \qquad e^{(k)} = -A^{-1} r^{(k)}$$

(da A symmetrisch positiv definit und damit invertierbar ist) sowie die optimale Schrittweite

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}},$$

(vgl. Augabe 3) aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{||x^* - x^{(k+1)}||_A^2}{||x^* - x^{(k)}||_A^2} &= \frac{(x^* - x^{(k+1)})^T A (x^* - x^{(k+1)})}{(x^* - x^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)})} \\
&= \frac{(x^* - x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})}{(x^* - x^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)})} \\
&= \frac{(-e^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})^T A (-e^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})}{(-e^{(k)})^T A (-e^{(k)})} \\
&= \frac{((A^{-1} r^{(k)}) - \alpha_k r^{(k)})^T A ((A^{-1} r^{(k)}) - \alpha_k r^{(k)})}{((A^{-1} r^{(k)}))^T A (A^{-1} r^{(k)})} \\
&= \frac{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)} - 2\alpha_k (r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\
&= 1 - \frac{2\alpha_k (r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\
&= 1 - \frac{2 \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}} (r^{(k)})^T r^{(k)} - \left(\frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}} \right)^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\
&= 1 - \frac{((r^{(k)})^T r^{(k)})^2}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)} \cdot (r^{(k)})^T A r^{(k)}} \\
&\overset{\text{Kantorovic}}{\leq} 1 - \frac{4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(A)}{(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A))^2} \\
&= \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Wurzelziehen (alle Terme sind positiv, so dass kein Betrag notwendig ist!) liefert schließlich

$$||x^* - x^{(k+1)}||_A \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right) ||x^* - x^{(k)}||_A.$$

b) Wenden wir die Ungleichung k Mal an (für jeden Iterationsschritt ein Mal), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
||x^* - x^{(k)}||_A &\leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A \\
&= \left(\frac{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} - 1}{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} + 1} \right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A \\
&= \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A,
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für die Kondition von Matrizen, die symmetrisch positiv definit sind, gilt:

$$\kappa_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$